# Ciągłość funkcji

wykonanie: Andrzej Jeziorski

Rozumienie intucyjne:

O funkcji mówimy, że jest ciągła (w danym przedziale), jeśli jej wykres nie ma skoków (w danym przedziale).

Ściśle, funkcja jest ciągła w danym przedziale, jeśli jest ciągła w każdym punkcie, należącym do przedziału. Jeśli w jakimś punkcie funkcja nie jest ciagła (ma skok wartości na wykresie), to mówimy, że funkcja ma w tym punkcie nieciągłość.

nieciaglosc.pdf

costam.pdf

# Definicja ciągłości Cauchy'ego

Funkcja f jest ciągła w punkcie a jesli:

$$\forall_{\varepsilon>0}\,\exists_{\delta>0}\,\forall_{x:|x-a|<\delta}\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

Oznacza to tyle, że dowolnie małym przyrostom argumentu odpowiadają dowolnie małe zmiany wartości funkcji. Nie ma nagłych skoków wartości.

Rozważmy, na przykład, funkcje $f(x)=x^2$ i $g(x)=\frac{|x|}{x}$ dla $x\neq 0$ $g(x)=1$ dla $x=0$:

Dla $g(x)$ w otoczeniu punktu 0 przyrost wynosi 2 nawet w dowolnie małym obszarze $|x-0|<\delta$. Oznacza to, że w $\mathrm{x}=0$ jest nieciągłość.

Przyrost $f(x)$ w otoczeniu punktu $a$ jest zależny od wielkości obszaru $|x-a|<\delta$.

$$|f(x)-f(a)|=|x^2-a^2|=|x-a||x+a|\leq|x-a|(|x-a|+|2a|)<\delta(\delta+2|a|)<\varepsilon$$

$$\text{czyli } |f(x)-f(a)|<\varepsilon \text{ gdy } \delta<\frac{\varepsilon}{\sqrt{a^2+\varepsilon}+|a|}$$

Dla dowolnych przyrostów wartości funkcji $\varepsilon$ można znaleść obszar argumentów $|x-a|<\delta$ taki, że zmiana wartości funkcji w tym obszarze bedzie mniejsza od $\varepsilon$. Funkcja $f(x)$ jest zatem ciągła w punkcie $a$ i na całej dlugości osi, gdyż punkt a jest dowolny.

# Definicja ciągłości Heinego

Funkcja $f$ jest ciągła w punkcie $a$, jeśli:

$$\forall_{x_n : x_n \to a} \; f(x_n) \to f(a)$$

Oznacza to, że dla dowolnego ciagu $x_n$ zbieżnego do $a$, nowy ciąg $f(x_n)$ dąży do wartości $f(a)$.

Przykładowo:

$$f(x) = x^2 \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} {x_n}^2 = 1 = f(1)$$

więc funkcja $f(x)$ jest ciągła w punkcie $1$.

W przypadku $g(x) = \frac{|x|}{x}$ warunek przestaje być spełniony dla niektórych ciągów $x_n$.

$$g(0) = 1 \qquad x_n = -\frac{1}{n} \to 0 \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n|}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|-\frac{1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = -1 \neq g(0)$$

więc funkcja $g(x)$ ma w punkcie $0$ nieciągłość.

Łatwo zauważyć, że obydwie definicje ciągłości funkcji są podobne do odpowiadających im definicji granicy funkcji w punkcie, także Cauchy'ego i Heinego. Pokazane wcześniej defnicje ciągłości sprowadzają się więc do następującego twierdzenia:

Funkcja, która jest ciągła w punkcie $a$ spełnia warunek:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Jeśli warunek ten nie jest spełniony mówimy, że funkcja $f$ ma w punkcie $a$ nieciągłość (pod warunkiem, że $a$ należy do dziedziny funkcji).

Na przykład:

$$\lim_{x \to 1} x^2 = 1^2$$

wiec, funkcja $x^2$ jest ciągła w punkcie $1$. Gdyby zbadać wszystkie inne punkty funkcja okazałaby się być ciągła na całej długości osi x.

Rozważmy funkcję $g(x) = \frac{|x|}{x}$ zdefiniowaną wcześniej. Dla funkcji tej mamy:

$$g(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla x} < 0 \\ 1 & \text{dla x} \geq 0 \end{cases}$$

A zatem:

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 0^-} g(x) = -1$$

Funkcja nie ma granicy w $0$, a tym samym jej granica w $0$ nie jest równa wartości funkcji dla argumentu $0$. Funkcja $g(x)$ jest nieciągła w punkcie $0$.