Dwumian Newtona

Agnieszka Dąbrowska i Maciej Nieszporski

8 stycznia 2011

1 Wstęp

Wzory skróconego mnożenia, które poznaliśmy w gimnazjum

$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$$

uogólnimy na wyższe potęgi $x+y$. O ile wypisanie następnego wzoru nie przysparza nam problemów

$$(x+y)^4 = (x+y)^3(x+y) = (x^3+3x^2y+3y^2x+y^3)(x+y) = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$

o tyle znalezienie współczynnika stojącego przy $x^{77}y^{33}$ w rozwinięciu $(x+y)^{100}$ wymaga chwili zastanowienia.

Zastanówmy się chwilę.

Podczas wymnażania siedmiu składników

$$(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

wkład do współczynnika powiedzmy przy x^3y^4 będą miały między innymi mnożenie wytłuszczonych liter

$$(\mathbf{x}+y)(\mathbf{x}+y)(x+\mathbf{y})(x+\mathbf{y})(x+\mathbf{y})(x+\mathbf{y})(\mathbf{x}+y)$$
$$(x+\mathbf{y})(\mathbf{x}+y)(x+\mathbf{y})(x+\mathbf{y})(\mathbf{x}+y)(x+\mathbf{y})(\mathbf{x}+y)$$

Na ile możliwych sposobów można wybrać z 7 czynników 3 iksy? Innymi słowy ile jest wszystkich kombinacji 3-elementowych ze zbioru 7-elementowego (liczba możliwych wyborów zbioru 3-elementowego ze zbioru 7-elementowego)?

Odpowiedź być może części czytelników jest znana, ta liczba to $\binom{7}{3} := \frac{7!}{3!4!}$. (Ale laszemu? O tym potem.)

2 To o czym należy wiedzieć

2.1 Symbol Newtona "!"

Definiujemy dla: liczb całkowitych n, k spełniających warunki: $0 \leqslant k \leqslant n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

2.2 Własności Symbolu Newtona "!"

Łatwo pokazać, że

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \binom{0}{0} = 1 \tag{1}$$

oraz

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{2}$$

i nieco trudniej, że

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n \tag{3}$$

2.3 Dwumian Newtona "!"

Twierdzenie o dwumianie mówi nam, że : każda naturalną potęgę sumy $x + y$ można rozłożyć na:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

2.4 Przykład:

$$\begin{aligned}
(x+y)^8 &= \binom{8}{0}x^8 + \binom{8}{1}x^7y + \binom{8}{2}x^6y^2 + \binom{8}{3}x^5y^3 + \binom{8}{4}x^4y^4 + \binom{8}{5}x^3y^5 + \\
&+ \binom{8}{6}x^2y^6 + \binom{8}{7}xy^7 + \binom{8}{8}y^8 = x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + \\
&+ 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8
\end{aligned}$$

Łatwo tu zauważyć, że jeśli jedna ze zmiennych wynosi 1,(1 do dowolnej potęgi to zawsze 1) wzór upraszcza się do :

$$(x+1)^8 = \binom{8}{0}x^8 + \binom{8}{1}x^7 + \ldots + 1$$

Uogólniając:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}x^k$$

2.5 Przykład 2. Na potęgę różnicy wzór też działa :)

Zastępując we wzorze y przez $-y$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
(x-y)^5 &= \binom{5}{0}x^5 - \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 - \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 - \binom{5}{5}xy^5 = \\
&= x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5
\end{aligned}$$

2.6 Dowód indukcyjny "4"

Dla $n = 1$ zachodzi:

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} x y^0 + \binom{1}{1} x^0 y = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k$$

Poczyńmy założenie indukcyjne, tzn. załóżmy, że dla pewnego n zachodzi

$$(x+y)^n = \binom{n}{0} x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n} y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Pokażemy, że wynika stąd

$$(x+y)^{n+1} = \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \binom{n+1}{1} x^n y + \binom{n+1}{2} x^{n-1} y^2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

Rzeczywiście, zapisując

$$(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+y)^n,$$

korzystając z założenia indukcyjnego

$$(x+y)(x+y)^n = (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

i wymnażając otrzymujemy

$$(x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}.$$

Ostatnie wyrażenie można zapisać

$$\binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + \binom{n}{n} y^{n+1}.$$

Przenumerowując wskaźniki w drugiej sumie

$$\binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n-k+1} y^k + \binom{n}{n} y^{k+1}$$

i używając równości (3) ostatecznie mamy

$$x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + y^{k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k$$

co kończy dowód.

2.7 Trik na obliczenie wartości dwumianu: Trójkąt Pascala "!"

No może nie tyle trik ile użycie związku (3). Jak konstruujemy "Trójkąt":
1.Dwa boki są samymi jedynkami. Na szczycie również stoi jedynka.
2.Następnie wypełniamy trójkąt od góry, liczbami powstałymi z sumowania dwóch liczb stojących nad naszą nową liczbą.

```
      1
    1   1
  1   X   1
1   Y   Z   1
```

3.Tak, więc $X = 2$ $[1 + 1]$, $Y = Z = 3$ $[2 + 1]$
4. A teraz pełniejsza wersja :)

```
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
```

5.Jak to się ma do współczynników dwumianu Newtona?
Otóż możemy przyjąć że wysokość trójkąta(liczona od wierzchołka do podstawy) to n, a szerokość) to k. Ważne jest również to, że zaczynamy liczyć od 0.
$\binom{0}{0} = \mathbf{1}$ i to jest wierzchołek naszego trójkąta

3 W którym wykładowca wtrąca swoje trzy grosze "*"

Wyobraźmy sobie, że stajemy przed problemem znalezienia nieznanych współczynników $f(n, k)$ rozkładu i pałamy niechęcią do kombinatoryki

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} f(n, k) x^{n-k} y^k \tag{4}$$

To co bez trudu zauważamy to fakt

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; f(n, 0) = 1 = f(n, n) \tag{5}$$

Znajdźmy związek między współczynnikami rozkładu (4) $f(n,k)$ i współczynnikami $f(n+1,k)$ postępując tak jak dowodzie indukcyjnym z poprzedniego rozdziału, to znaczy używając tożsamości $(x+y)^{n+1} = (x+y)(x+1)^n$. Otrzymujemy

$$f(n+1,k) = f(n,k) + f(n,k-1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Ostatnie równanie jest przykładem równania różnicowego w dwóch zmiennych niezależnych (n i k). Natomiast warunek (5) przykładem warunku brzegowego nałożonego na równanie (6). Przy zadanym warunku brzegowym (obrazowo: nałożonym na ramiona "nieskończonego trójkąta" z ustępu 2.7) równanie (6) ma dokładnie jedno rozwiązanie jak to widzieliśmy w ustępie 2.7 konstruując trójkąt paskala. Tym rozwiązaniem jest

$$f(n,k) = \binom{n}{k}.$$

Innymi słowy jeśli mamy zadaną wartość funkcji na brzegu obszaru (w naszym przypadku ramiona "nieskończonego trójkąta") to równanie (6) pozwala znaleźć warość funkcji w dowolnym punkcie "wnętrza trójkąta". W niedalekiej przyszłości będą Państwo rozwiązywać równania różniczkowe przy zadanych warunkach początkowo-brzegowych. Szczególną uwagę zwrócimy na takie warunki początkowo-brzegowe, które gwarantują istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania.

3.1 Wielomiany a symbol Newtona

Niech dana będzie rodzina wielomianów

$$w_k(x) = \frac{x^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Rodzina ta ma następującą własność

$$\frac{d}{dx} w_{k+1}(x) = w_k(x).$$

Dyskretnym odpowiednikiem takiej rodziny jest

$$W_k(n) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Istotnie, dla ustalonego k, $W_k(n)$ jest wielomianem k-tego stopnia w n. Ponadto, oznaczając przez Δ_n operator różnicowy $\Delta_n f(n) := f(n+1) - f(n)$ łatwo sprawdzić, że $\Delta_n W_{k+1}(n) = W_k(n)$. Z tego względu symbol Newtona jest elementarnym obiektem w rachunku różnicowym.

Ponieważ równanie (6) przy zadanym warunku (5) można traktować jako ciąg równań

$$\Delta_n f(n,1) = 1$$
$$\Delta_n f(n,2) = f(n,1)$$
$$\Delta_n f(n,3) = f(n,2)$$

i tak dalej, a rozwiązanie tego ciągu równań przy warunku $f(n,n)$ to bułka z masłem, to i znalezienie rozwiązania (6) przy zadanym warunku (5) należy do elementarza równań różnicowych.