

Matematyka I, zadania domowe seria I

1. Wykazać, że dla dowolnego naturalnego n :

- liczba $n^3 + 2n$ jest podzielna przez 3,
- liczba $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ jest podzielna przez 8,
- liczba $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ jest podzielna przez 19,

2. Dla jakich liczb naturalnych prawdziwe są następujące nierówności:

- a) $6n + 6 < 2^n$
- b) $3n^2 + 3n + 1 < 2^n$
- c) $n^3 < 2^n$

Wskazówka: przy rozwiązywaniu kolejnych podpunktów można wykorzystać wyniki udowodnione we wcześniejszych.

3. Udowodnij za pomocą metody indukcji matematycznej, że dla n naturalnych:

- $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$, Wskazówka: skorzystaj z $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}$
- $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \dots + n(n-1)^2 + (n+1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$
- $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{2n}{2n+1}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{n}{3n+1}$
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$

4. Jaka liczba jest współczynnikiem przy x^{97} w rozwinięciu $(1+x)^{100}$?

5. Pokazać, że $\sum_{k=0}^n (-2)^k \binom{n}{k} = (-1)^n$

6. Znaleźć wyrażenie nie zawierające x w rozwinięciu $(3x - \frac{2}{x^2})^9$

7. Znaleźć współczynnik stojący przy $1/x$ oraz $1/x^2$ rozwinięcia $(2x + \frac{1}{2x})^9$.

8* Udowodnij za pomocą metody indukcji matematycznej, że dla n naturalnych:

- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$
- $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n$ przy założeniu: $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$
(wniosek: nierówność Bernoulliego $(1+x)^n \geq 1+nx$).
- $a^n + b^n \leq (a+b)^n \leq 2^n(a^n + b^n)$, $a, b \geq 0$
- $(n+1)^n < n^{(n+1)}$ dla $n \geq 3$