9.12.2014

Matematyka I, zadania domowe, seria 10

1. Wyznaczyć granice następujących ciągów:

(a) $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$,

(b) $b_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$,

(c) $c_n = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}$,

(d) $d_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$,

(e) $e_n = \left(\frac{n+5}{n}\right)^n$,

(f) $f_n = \left(1 - \frac{4}{n}\right)^{-n+3}$,

(g) $g_n = \left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$,

(h) $h_n = \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$,

(i) $i_n = \frac{\ln\left(1+\frac{4}{n}\right)}{\frac{1}{n+3}}$,

(j) $j_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^{n^2}$,

(k) $k_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$,

(l) $l_n = \frac{8^{\log_2 n}}{2^n}$,

(m) $m_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $(a, b > 0)$,

(n) $n_k = \left(\frac{1}{k^2}\right)^{\frac{2k}{k+1}}$,

(o) $o_n = \frac{\log_2(n+1)}{\log_3(n+1)}$,

(p) $p_n = \frac{\log_n(n+1)}{\log_n(n+2)}$,

(q) $q_n = \left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^n$,

(r) $r_n = \frac{\log_2(n^4+1)}{\log_2(n^2+1)}$,

(s) $s_n = (\cos\frac{1}{n})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{n}}}$,

(t) $t_n = (\ln n)^{\frac{1}{n}}$,

(u) $u_n = (\operatorname{tgh} n)^{\sinh^2 n}$.

2. Dla jakich wartości parametru k granicą ciągu o wyrazie ogólnym

$$a_n = \frac{kn^2}{(k-1)n^2+n},$$

przy $n \to \infty$, jest liczba dodatnia?

3. Niech x_n będzie ciągiem zbieżnym i niech y_n będzie określony wzorem

$$y_n = \frac{n^2x_n+4n-1}{n^2x_n-5n+2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Wykazać, że

- jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ to ciąg y_n jest zbieżny
- jeśli $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ to ciąg y_n może być zbieżny lub nie a ponadto jego granica może być dowolną liczbą (w zależności od ciągu x_n).

4. Wyznaczyć długość krzywej łamanej $M_0M_1M_2\ldots$ wpisanej w spiralę logarytmiczną $r = e^{-\varphi}$, gdzie r, φ są współrzędnymi biegunowymi:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi\ .$$

Wierzchołki M_n krzywej mają współrzędne $\varphi_n = \frac{n\pi}{2}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Odpowiedzi:

1. $a_n \to 1/e^3$, $b_n \to 1/e$, $c_n \to 1/e^2$, $d_n \to 1$, $e_n \to e^5$, $f_n \to e^4$, $g_n \to e^6$, $h_n \to 0$, $i_n \to 4$, $j_n \to 0$, $k_n \to \infty$, $l_n \to 0$, $m_n \to \sqrt{ab}$, $n_k \to 0$, $o_n \to \ln 3/\ln 2$, $p_n \to 1$, $q_n \to 1$, $r_n \to 2$, $s_n \to \frac{1}{\sqrt{e}}$, $t_n \to 1$, $u_n \to \frac{1}{\sqrt{e}}$.

3. $k \in]-\infty, 0[\cup]1, \infty[$.

4. $\frac{\sqrt{e^\pi+1}}{e^{\pi/2}-1}$.