Matematyka I, zadania domowe, seria 4

1. Oblicz:

   (a) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
   (b) $\mathrm{arctg}(1)$,
   (c) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$,
   (d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$,
   (e) $\arccos\left(\cos\frac{4\pi}{5}\right)$,
   (f) $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$,
   (g) $\mathrm{arctg}\left(\mathrm{tg}\,\frac{4\pi}{5}\right)$,
   (h) $\arccos\left(\sin\frac{4\pi}{5}\right)$,
   (i) $\arccos(\sin(2014\pi/5))$.

2. Oblicz:

   (a) $\cos(\mathrm{arc\,tg}(2))$,
   (b) $\sin(\mathrm{arc\,ctg}(3))$,
   (c) $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{3}\right)\right)$,
   (d) $\mathrm{tg}\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right)$.

3. Rozwiąż równania:

   (a) $\mathrm{tg}\,(3\arcsin x) = 1$,
   (b) $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{3}$,
   (c) $\arccos(\sin x) = \frac{\pi}{6}$,
   (d) $(*)$ $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$,
   (e) $(*)$ $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin\frac{1}{3}$.

   Wskazówka: (d) Zapisać $2x = \sin y = 2\sin z$ oraz $y = \frac{\pi}{3} - z$,
   (e) $\frac{2}{\sqrt{3}}x = \sin y$, $\sqrt{1-x} = \sin z$, $\sin(y-z) = \frac{1}{3}$.

4. Która z pary liczb jest większa? Znaleźć odpowiedź bez użycia kalkulatora.

   (a) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{5}{6}}$ czy $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$,
   (b) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ czy $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

5. Rozwiąż nierówności:

   (a) $\frac{1}{x-\sqrt{x}} \geqslant \frac{4}{15}$,
   (b) $2x > \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$.

6. Dla jakich wartości parametru a równanie $ax^{-11/6} - 3x^{-5/6} + 9x^{1/6} = 0$ ma dwa różne rozwiązania?

7. $(*)$ Wykaż, że:

   (a) $\mathrm{arc\,tg}\,\frac{7}{9} + \mathrm{arc\,ctg}\,8 = \frac{\pi}{4}$,
   (b) $2\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{4} + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{7}{23} = \frac{\pi}{4}$.

   Wskazówka: Pokazujemy, że oba sumowane kąty należą do przedziału $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Następnie bierzemy tangens obu stron równania.

Odpowiedzi:

1. (a) $\frac{\pi}{3}$, (c) $-\frac{\pi}{6}$, (e) $\frac{4\pi}{5}$, (g) $-\frac{\pi}{5}$, (i) $\frac{3\pi}{10}$.
   (b) $\frac{\pi}{4}$, (d) $\frac{2\pi}{3}$, (f) $\frac{\pi}{5}$, (h) $\frac{3\pi}{10}$,

2. (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $\frac{3}{\sqrt{10}}$, (c) $2\sqrt{\frac{2}{3}}$, (d) $\frac{4}{3}$.

3. (a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ lub $\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2\sqrt{2}}$, (c) $\frac{\pi}{3}+2n\pi$, $\frac{2\pi}{3}+2n\pi$, (e) $\frac{2}{3}$.
   (b) $\pm\frac{\pi}{6}+2n\pi$, (d) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$,

4. (a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{6}} < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}}$, (b) $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}} > \left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

5. (a) $x \in]1, \frac{25}{4}]$, (b) $x \in]\frac{\sqrt{7}}{2}, 2]$.

6. $a \in]0, \frac{9}{4}[$.