

17.11.2014

Matematyka I, zadania domowe, seria 6

- Oblicz pochodne podanych funkcji (tam, gdzie pochodne te istnieją):
a) $\cos^2(\sin(x^2))$, b) $\frac{x\sqrt{x+1}}{x+2}$, c) $\frac{\sin(x)-x\cos(x)}{\cos(3x)}$, d) $\frac{\cos(x+1)}{\sin(x)}$, e) $\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$, f) $\cos(4x) + \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}$ g) $\sin(x^2)$.
W przypadku (g) oblicz również drugą pochodną.
- Znajdź punkty, w których styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^3 + 1$ jest nachylona do osi x pod kątem większym niż $\frac{\pi}{4}$.
- Pod jakimi kątami przecinają się wykresy funkcji $f(x) = x$ i $g(x) = x^2$?
- Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax$, gdzie a jest pewnym parametrem rzeczywistym. Dla jakich wartości tego parametru funkcja f jest rosnąca?
- Dla jakich wartości parametrów a i b funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq x_0 \\ ax + b & \text{dla } x > x_0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w punkcie x_0 ?

- Krzywa w płaszczyźnie (x, y) zadana jest równaniem $x^3 + 2xy + y^3 = 13$.
Znajdź równanie prostej stycznej do tej krzywej w punkcie $(1, 2)$.

Odpowiedzi:

Zad. 1:

a) $-4x \cos(\sin x^2) \sin(\sin x^2) \cos x^2$, b) $\frac{x^2+6x+4}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}}$, c) $\frac{x \sin x \cos 3x + 3 \sin 3x (\sin x - x \cos x)}{\cos^2 3x}$,

d) $\frac{-\sin(x+1) \sin x - \cos x \cos(x+1)}{\sin^2 x}$, e) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, f) $-4 \sin 4x + \frac{x+2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$,

g) $[\sin x^2]' = 2x \cos x^2$, $[\sin x^2]'' = 2 \cos x^2 - 4x^2 \sin x^2$.

Zad. 2: $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ lub $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zad. 3: $\gamma = \frac{\pi}{4}$ lub $\gamma = \arctan \frac{1}{3} \simeq 0.3217 \simeq 18^\circ$.

Zad. 4: $a \leq 0$.

Zad. 5: $a = 2x_0$ i $b = -x_0^2$.

Zad. 6: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.