

### Matematyka I, zadania domowe, seria 7

**Zadanie 1.** Zbadać zbieżność ciągów określonych rekurencyjnie (w przypadku ciągów zbieżnych obliczyć granicę):

a)

$$a_{n+1} = 5 \frac{3a_n + 1}{2a_n + 6}, \quad a_1 = 6$$

b) \*

$$a_{n+1} = \frac{3}{4a_n + 1}, \quad a_1 > 1.$$

**Zadanie 2.** Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie (w przypadku gdy jest zbieżny obliczyć granicę):

$$a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n^2 + 1,$$

dla przypadków:

a)  $0 < a_1 < 2$

b)  $a_1 > 2$ .

**Zadanie 3.** Ciąg rekurencyjny zadany jest wzorem

$$a_{n+1} = \sin a_n + a_n, \quad a_1 = 3.$$

Znajdź granicę  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

**Zadanie 4.** Znajdź granicę ciągu

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 1, \quad a_1 = 0.$$

**Zadanie 5.** Sprawdź, że obrazem przekształcenia

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{5} \right\} \ni x \rightarrow f(x) = -\frac{4x + 3}{5x + 4}$$

jest zbiór  $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{5} \right\}$ , a więc ciąg określony rekurencyjnie

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

jest dobrze zdefiniowany dla każdego  $a_1 \neq -\frac{4}{5}$ . Dla jakich wartości  $a_1$  ciąg ten ma granicę.

**Wskazówka:** Obliczyć  $f(f(x))$ .

*Odpowiedzi:* 1) a) 5 b)  $\frac{3}{4}$  2) a) 2 b)  $\infty$  3)  $\pi$  4) 2 5)  $a_1 \in \left\{ -1, -\frac{3}{5} \right\}$