WykTes 12

•) BEC etc

12. Kondensacje Bosego-Einsteina

Przypomnijmy

$$\frac{\langle N \rangle}{V} = \langle \rho \rangle \overset{V \gg 1}{\approx} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{e^{\beta(\varepsilon(\vec{k})-\mu)}-1}.$$

Niech $\varepsilon(\vec{k}) = \vec{k}^2$.

wtedy $$\langle N \rangle \simeq V \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^\infty \frac{dk\, k^2}{e^{\beta(k^2-\mu)}-1} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \beta k^2 = x \\ 2\beta k\, dk = dx \\ dk = \frac{dx}{2\beta \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\beta}}} \end{array} \right\| = V \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\beta^{-1} x \frac{dx}{2\sqrt{\beta}\sqrt{x}}}{e^{(x-\beta\mu)}-1}$$

$$= \frac{V}{4\pi^2} \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^{x-\beta\mu}-1}$$

Uwaga: gdy $\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m}$ oraz uwzględni degeneracje spinową g to

$\Gamma(\frac{3}{2})$

$$\langle N \rangle \sim V \frac{2^{5/2} \pi g\, m^{3/2}}{\beta^{3/2} h^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^{x-\beta\mu}-1}.$$

$$= V g \lambda^{-3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^{x-\beta\mu}-1}$$

Dla $T \neq 0$ całka ta jest rosnącą funkcją $\mu \leq 0$

Osiąga maksimum dla $\mu = 0$:

$$N(T, \mu=0, V) = C(h,m)\, V\, \beta^{-3/2} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^x - 1}}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)} \longrightarrow \text{sk.}$$

Oznacza to, że największa liczba bozonów jaka może się pomieścić w naczyniu o obj. V jest skończona i proporcjonalna do $T^{3/2}$. W szczególności dla $T \to 0$ liczba bozonów wynosi 0 co jest sprzeczne z faktem, że każdy stan może być obsadzony przez dowolną ich liczbę. Gdzie błąd?

Przy przejściu od sumy do całki!

Mod odpowiadający $x = \varepsilon(\vec{k}) = 0$ w całce odpowiada waga $\sqrt{x} \rightsquigarrow$ usuwany jest z sumy. Tymczasem może on mieć skończony udział, gdy $\mu \to 0$.!

Fizycznie: bozony będą obsadzać stan o najniższej energii!

Wydzielając pierwszy wyraz z sumy!

$$N = \sum_k \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1} = \frac{g}{e^{-\beta\mu} - 1} + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon(k) - \mu)} - 1}$$

Całka prowadzi do podobnego wyrażenia jak powyżej

Analizujemy

$$I(\mu,\beta) = \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^{x-\beta\mu}-1} = \left\| z = e^{\beta\mu} \right\|$$

$$= \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\, z}{e^{x}(1-e^{-x}z)}\, dx = \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_0 \frac{\sqrt{x}}{e^{x}} \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} e^{-nx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} x^{1/2} z^{n+1} e^{-(n+1)x}\, dx = \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_0^\infty \sum_{n=1}^{\infty} x^{1/2} z^{n} e^{-nx}\, dx$$

$$= \left\| y = nx \right\| = \frac{1}{\beta^{3/2}} \int_0^\infty y^{1/2} z^n e^{-y} n^{-3/2}\, dy = \frac{1}{\beta^{3/2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{3/2}}$$

Niech

$$g_t(z) := \sum_{n\geq 1}^{\infty} \frac{z^n}{n^t} \implies I(\mu,\beta) = \beta^{-3/2}\, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) g_{3/2}(z)$$

Wracając do

$$N = \frac{g}{e^{-\beta\mu}-1} + \sum_{k\neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon(k)-\mu)}-1} = \frac{g}{e^{-\beta\mu}-1} + V g \lambda^{-3} g_{\frac{3}{2}}(z)$$

$$\Downarrow \quad n = \frac{N}{V}$$

$$\boxed{\frac{\lambda^3}{g} n = \frac{\lambda^3}{V} \frac{z}{1-z} + g_{3/2}(z)}$$

równanie przestępne na μ.

Zauważmy, że dla $z=1 \iff \mu=0$

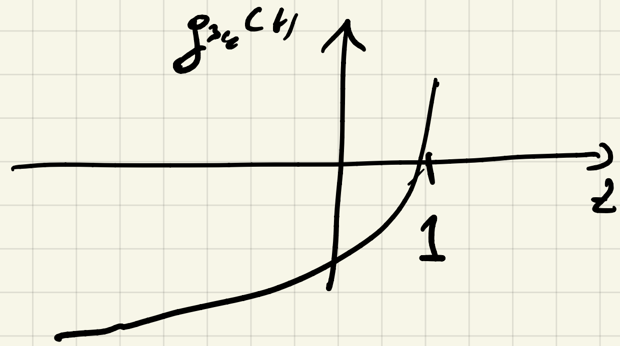
coś się dzieje — tak jak przewidzieliśmy.

Mamy:

$$g_{3/2}(1) \approx 2{,}612 \qquad z=e^{\beta\mu}\leq 1$$

oraz

$$\lim_{z\to 1^-} \frac{d\,g_{3/2}(z)}{dz} = \infty$$



Zauważmy, że dla $V \gg 1$

wyraz $\frac{\lambda^3}{V}\frac{z}{1-z}$ jest mały i

•) dla $\frac{n\lambda^3}{g} < 2{,}612$

$$\frac{n\lambda^3}{g} = g_{3/2}(z)$$ z dokładnością do wyrazów $O\left(\frac{\lambda^3}{V}\right)$

wyjdzie $z = g_{3/2}^{-1}\left(\frac{n\lambda^3}{g}\right)$

•) dla $\frac{n\lambda^3}{g} > 2{,}612$ przyjmijmy $z=1-\frac{a\lambda^3}{V}+\dots$

mamy:

$$\frac{n\lambda^3}{g} = \frac{\lambda^3}{V}\,\frac{1-\frac{a\lambda^3}{V}}{\frac{a\lambda^3}{V}} + \underbrace{g_{3/2}\left(1-\frac{a\lambda^3}{V}\right)}_{\approx g_{3/2}(1)}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{\frac{n\lambda^3}{g} - g_{3/2}(1)}$$

Aktywność wyraża się zatem wzorem

$$z = \begin{cases} g_{3/2}^{-1}\left(\dfrac{n\lambda^3}{g}\right) & \text{dla } T > T_0 \\ 1 - \dfrac{1}{\dfrac{n\lambda^3}{g} - g_{3/2}(1)} \dfrac{\lambda^3}{V} & \text{dla } T < T_0 \end{cases}$$

gdzie T_0 wyznacza $\boxed{\dfrac{n\lambda_0^3}{g} = g_{3/2}(1)}$

w szczególności: w granicy termodynamicznej

$V \to \infty$ i $z = 1$ dla $T < T_0 \Leftrightarrow \mu = 0$

Średnią liczbę cząstek: $T < T_0$

$$\langle n_0 \rangle = g \frac{z}{1-z} = g\left(\frac{V}{a\lambda^3} - 1\right) \approx \frac{gV}{a\lambda^3}$$

$$\approx \frac{gV}{\lambda^3}\left(\frac{n\lambda^3}{g} - g_{3/2}(1)\right) = N - N\frac{\lambda_0^3}{\lambda^3} =$$

$$= N\left(1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right)$$

$\langle n_0 \rangle \sim N$ dla $T < T_0$: kondensacja Bosego-Einsteina. Makroskopowe obsadzenie pojedynczego modu kwantowego.