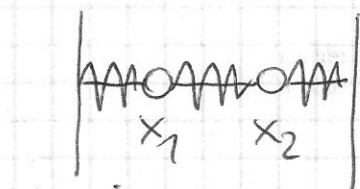


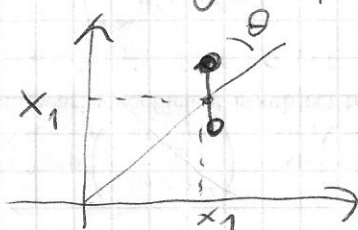
Równanie falowe cząstki.

2.1

"Normalnie" opisujemy układy używając zmiennych uogólnionych przykłady



dwa masy na sprężynkach
 x_1 i x_2



rotator w 2D
 x_1, x_2, θ

itd

Ruch opisuje równanie Newtona

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\sum e_i \partial_{x_i} V = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}}$$

Jeśli nie ma sił zewnętrznych energia

$$E = E_{\text{kin}} + V \quad \text{jest zachowane}$$

$$\text{np } E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

Na mechanice klasycznej nauczyliśmy się używać "bardziej wyrafinowanych" równań niż równanie Newtona.

Używaliśmy Lagranżanu i Hamiltonianu i odpowiednio równań ~~z~~ Eulera Lagrange'a lub równań Hamiltona.

Np dla oscylatora harmonicznego:

$$V = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad F = -\partial_x V = -m \omega^2 x = m \ddot{x}$$

$$H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

r. Hamiltona

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m \omega^2 x$$

2.2

Ale teraz pojawia się trudność. Jak wyjaśnić zjawisko Davissona Germera, lub interferencje cząstek na dwóch szczelinach?

A może trzeba pomyśleć o równaniu falowym dla cząstek? A ruch zapisać jako falę?

Zacznijmy od analogii
dla fotonu

$$E = \hbar \omega = \hbar \nu \quad \vec{p} = \hbar \vec{k} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{h}{p}$$

Pole elektryczne, fale elektromagnetyczne można zapisać jako „zespół”, – kombinację fal płaskich

$$E = \int d^3k A(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

i tu jest konieczny związek dyspersyjny
 $\omega = c \cdot k$ lub $E = cp$

dla cząstki masywnej (swobodnej)
związek dyspersyjny (nierelatywistyczny)

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

Zrobimy „fale” dla cząstek z fal płaskich

$$\psi = \int dp A(p) e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r}/\hbar - iEt/\hbar)}$$

pojedyncze „fale” płaskie możemy rozumieć jako „strumień” „monoenergetyczny”, „monopędowy” cząstek – to intuicyjnie zbadamy dalej rozważając przejście cząstek przez przeszkodę – bariery!

roźniczkujemy równanie na ψ po czasie

$$\begin{aligned} -i\hbar \partial_t \psi &= \int dp \ E A(p) \exp(-i\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} - i\frac{Et}{\hbar}) \\ &= \int dp \ \frac{p^2}{2m} \dots \dots \dots \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy równanie Schrödingera dla cząstki swobodnej. Nasuwają się dwa pytania

1. co to jest ψ
2. co opisuje r. Schrödingera.

Równanie to opisuje dynamikę ruchu cząstki
Interpretacja ψ podał Born.

$|\psi(x,t)|^2 dx^3$ jest prawdopodobieństwem
znalezienia cząstki w objętości dx^3 wokół pkt x !

$\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ jest zatem gęstością prawdopodobieństwa
musimy jeszcze zarządzić $\int \rho(x,t) dx = 1$
zatem $\int |\psi(x,t)|^2 dx^3 = 1$ po całej przestrzeni
„dostępnej” dla cząstki

Od tej pory zamiast o trajektoriach ruchu
cząstki będziemy mówili o wartościach średnich

$$\langle x(t) \rangle = \int \psi^*(x,t) \times x \psi(x,t) dx$$

i wprowadzimy interpretację ~~przebiegu~~ algebraiczną