Zad. domowe nr 2: 11.03. (gr. 2) / 13.03. (gr. 1 i 3)

Wektory i operatory w notacji Diraca

1. *Zadanie obowiazkowe*

   Niech wektory $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$ stanowia baze ortonormalna w dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej. Zdefiniujmy operator $\hat{A}$ taki ze

$$\begin{aligned} \hat{A}|e_1\rangle &= 2|e_1\rangle - i\sqrt{2}|e_2\rangle, \\ \hat{A}|e_2\rangle &= i\sqrt{2}|e_1\rangle + 3|e_2\rangle. \end{aligned} \tag{1}$$

   - Znalezc macierz operatora $\hat{A}$ w bazie skladajacej sie z wektorow $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$.
   - Czy macierz ta jest hermitowska?
   - Korzystajac z zapisanej macierzowo postaci operatora $\hat{A}$, znalezc jego wartosci i wektory wlasne.
   - Znalezc unormowane wektory wlasne.
   - Sprawdzic bezposrednim rachunkiem, czy powyzsze wektory wlasne operatora sa ortogonalne.

2. *Zadanie obowiazkowe*

   Dla dowolnego unormowanego wektora $|v\rangle$, mozna zdefiniowac operator:

$$\hat{P}_v = |v\rangle\langle v|, \tag{2}$$

   ktory dzialac na dowolny wektor przestrzeni wektorowej rzutuje go na kierunek wyznaczony przez $|v\rangle$. Dlatego $\hat{P}_v$ nazywa sie operatorem rzutowym.

   Rozwazmy dwuwymiarowa przestrzen wektorowa oraz wektor $|w\rangle$, ktorego rozklad w bazie ortonormalnej wyznaczonej przez wektory $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$, jest nastepujacy:

$$|w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|e_2\rangle. \tag{3}$$

   - Czy wektor $|w\rangle$ jest unormowany? Jesli tak, to dlaczego?
   - Zapisac postac operatora rzutowego na kierunek $|w\rangle$, tzn. $\hat{P}_w$, uzywajac powyzszego rozkladu $|w\rangle$ w bazie $|e_1\rangle$ oraz $|e_2\rangle$ (tzn. zapisac postac operatora rzutowego $\hat{P}_w$ uzywajac wektorow bazowych $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$, $\langle e_1|$, $\langle e_2|$).
   - Znalezc macierz operatora $\hat{P}_w$ w powyzszej bazie.
   - Czy macierz ta jest hermitowska?
   - Korzystajac z zapisanej macierzowo postaci operatora $\hat{P}_w$, znalezc jego wartosci i wektory wlasne.
   - Znalezc unormowane wektory wlasne.
   - Sprawdzic bezposrednim rachunkiem, czy powyzsze wektory wlasne operatora sa ortogonalne.

3. *Zadanie nieobowiazkowe, dla chetnych, podnoszace ilosc punktow otrzymanych z jednego z powyzszych zadan (tj. tego, ktore zbiore) od 0% do 30% (w zaleznosci od jakosci wykonania tego zadania)*

   Niech wektory $|e_i\rangle$ ($i = 1...N$) stanowia baze ortonormalna w V. Zdefiniujmy nowa baze ortornormalna w V: $|\eta_i\rangle$ ($i = 1...N$). Pokazac, ze tzw. macierz przejscia zdefiniowana jako $U_{rs} = \langle\eta_r|e_s\rangle$ jest unitarna czyli spelnia nastepujaca wlasnosc: $UU^\dagger = \hat{1}$, gdzie $\hat{1}$ to macierz jednostkowa o N kolumnach i N wierszach. $U^\dagger$ oznacza sprzezenie hermitowskie tj. transpozycje oraz sprzezenie zespolone elementow macierzowych.