Transformata Fouriera

Piotr Szańkowski

I. TRANSFORMATA FOURIERA

Transformata Fouriera jest zdefiniowana przez całkę

$$\mathcal{F}\left[\psi(x')\right](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} \psi(x')\, \mathrm{d}x' \equiv \psi(k). \tag{1}$$

Wtedy transformata odwrotna jest dana przez

$$\mathcal{F}^{-1}\left[\psi(k')\right](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik'x} \psi(k')\, \mathrm{d}k' = \psi(x). \tag{2}$$

A. "Arcywłasności" transformaty Fouriera

1. Transformata jest przekształceniem liniowym:

$$\mathcal{F}\left[\alpha\psi(x) + \beta\chi(x)\right] = \alpha\mathcal{F}\left[\psi(x)\right] + \beta\mathcal{F}\left[\chi(x)\right] \tag{3}$$

Dowód: Wynika z liniowości całki.

2. Transformata pochodnej funkcji

$$\mathcal{F}\left[\frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x}\right](k) = ik\,\mathcal{F}[\psi(x)](k) \tag{4}$$

Dowód: Całkując przez części

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\frac{d\psi(x)}{dx}\mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{ll} f = e^{-ikx} & ,\ g' = \frac{d\psi(x)}{dx} \\ f' = -ik\, e^{-ikx} & ,\ g = \psi(x) \end{array} \right\} = -ik\, e^{-ikx}\psi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} + ik\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\psi(x)\mathrm{d}x, \tag{5}$$

Zakładamy, że $\psi(x)$ znika dostatecznie szybko w $\pm\infty$ i dzięki temu pozbywamy się wyrazu brzegowego.

3. Transformata Delty Diraca:

$$\mathcal{F}[1](k) = 2\pi\delta(k),$$
$$\mathcal{F}^{-1}[\delta(k)](x) = \frac{1}{2\pi}.$$

Dowód: Nie przytoczymy, gdyż rygorystyczny dowód jest dość skomplikowany i wymaga matematycznie zaawansowanej argumentacji.

4. Tożsamość Parsevala: "transformata zachowuje iloczyn skalarny":

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\chi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[\psi]^*(k)\mathcal{F}[\chi](k)\,\mathrm{d}k \tag{6}$$

Dowód: Użyjemy tożsamości

$$\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\,\mathcal{F}[\psi(x)](k)\,\right](x), \tag{7}$$

wstawiając taką postać funkcji do całki otrzymujemy

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k' \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}k'' \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{-i(k'-k'')x}\right)}_{=2\pi\delta(k'-k'')} \mathcal{F}[\psi]^*(k')\mathcal{F}[\chi](k'') = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[\psi]^*(k')\mathcal{F}[\chi](k')\mathrm{d}k'. \tag{8}$$

B. Pomniejsze własności transformaty Fouriera

1. Transformata funkcji przesuniętej

$$\mathcal{F}[\psi(x-x_0)](k) = e^{-ikx_0}\mathcal{F}[\psi(x)](k) \tag{9}$$

Dowód: Z bezpośredniego rachunku:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ikx}\psi(x-x_0) = \{x' = x - x_0\ ,\ \mathrm{d}x' = \mathrm{d}x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x'\, e^{-ik(x'+x_0)}\psi(x') = \\ = e^{-ikx_0}\mathcal{F}[\psi(x')](k). \tag{10}$$

2. Transformata funkcji przeskalowanej

$$\mathcal{F}[\psi(\alpha x)](k) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{F}[\psi(x)]\left(\frac{k}{\alpha}\right) \tag{11}$$

Dowód: Podobnie jak poprzednio, wynika z zamiany zmiennych.

3. Transformata funkcji sprzężonej

$$\mathcal{F}[\psi^*(x)](k) = \mathcal{F}[\psi(x)]^*(-k) \tag{12}$$

Dowód: Z bezpośredniego rachunku:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-ikx}\psi^*(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{ikx}\psi(x)\right)^* = \mathcal{F}[\psi(x)]^*(-k). \tag{13}$$

4. Transformata funkcji odbitej

$$\mathcal{F}[\psi(-x)](k) = \mathcal{F}[\psi(x)](-k), \tag{14}$$

wynika stąd, że

$$\psi(-x) = \pm\psi(x) \Rightarrow \mathcal{F}[\psi](-k) = \pm\mathcal{F}[\psi](k) \tag{15}$$

Dowód: Prosta zamiana zmiennych.