Zadania domowe nr 3 (18. marca 2021)

Pomiary, studnia potencjalu

1. Swobodna czastka o masie m znajduje sie w stanie

$$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -\frac{L}{2} \\ \sqrt{\frac{1}{L}} & , \quad -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0 & , \quad \frac{L}{2} < x \end{cases} , \tag{1}$$

   Znajdz gestosc prawdopodobienstwa zmierzenia pedu czastki. Jakie wartosci pedu nigdy nie zostana zmierzone?

   Wskazowka: Znajdz funkcje falowa ukladu w reprezentacji pedowej rozkladajac $\Psi(x)$ w bazie fal plaskich $\phi_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$.

2. Zakładając, że całkowita energia cząstki $E > 0$, pokaż, że poziomy energetyczne i unormowane funkcje falowe cząstki poruszającej się w w nieskończenie głębokiej studni potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & , \quad x < -a \\ 0 & , \quad -a \leq x \leq a \\ \infty & , \quad a < x \end{cases} , \tag{2}$$

   dane są wzorami:

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{8ma^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

$$\phi_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{2k\pi x}{2a}\right), \quad \text{gdy} \quad n = 2k, \tag{4}$$

$$\phi_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2a}\right), \quad \text{gdy} \quad n = 2k+1. \tag{5}$$

3. Dla cząstki znajdującej się w stanie

$$|\psi\rangle = i\frac{\sqrt{3}}{2}|\phi_0\rangle + \alpha|\phi_1\rangle, \qquad \alpha \in \mathbf{R} \tag{6}$$

   gdzie $|\phi_0\rangle$ jest stanem o energii E_0, a $|\phi_1\rangle$ jest stanem o energii E_1, znajdź:

   (a) wartości α zapewniające poprawne unormowanie stanu $|\psi\rangle$ (tzn. $\langle\psi|\psi\rangle = 1$; proszę nie liczyć całek w tym poleceniu);

   (b) prawdopodobieństwo, że pomiar energii układu da wartość E_1 (proszę nie liczyć całek w tym poleceniu);

   (c) średnią energię cząstki w stanie $|\psi\rangle$ (tzn. $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle$; proszę nie liczyć całek w tym poleceniu);

   (d) średnie położenie cząstki w stanie $|\psi\rangle$ (tzn. $\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle$).

Załóż, że zależności położeniowe funkcji falowych dane są funkcjami:

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}, \tag{7}$$

$$\phi_1(x) = 2\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}} x, \tag{8}$$

gdzie m, ω to stałe rzeczywiste. Dodatkowo: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$. Powyższe stany są ortonormalne.