

## Zadania domowe nr 6 (27. kwietnia 2021)

### Atom wodoru

1. Elektron znajduje się we wzbudzonym stanie  $|\psi\rangle$  atomu wodoru takim, że część radialna jego funkcji falowej wyraża się wzorem

$$R_{2,1}(r) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2a_0} \right)^{3/2} \frac{r}{2a_0} e^{-\frac{r}{2a_0}}, \quad (1)$$

a część zależna od kątów harmoniką sferyczną

$$Y_{1,-1}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \sin \theta. \quad (2)$$

- (A) Zapisz pełną funkcję falową elektronu znajdującego się w stanie  $|\psi\rangle$  w reprezentacji położeniowej. Jak nazywa się orbital, w którym znajduje się elektron?
- (B) Ile wynosi średnia wartość kwadratu momentu pędu w stanie  $|\psi\rangle$ ? Ile wynosi średnia wartość rzutu momentu pędu na oś  $\hat{z}$  w stanie  $|\psi\rangle$ ? Odpowiedź uzasadnij bez zbędnych obliczeń.
- (C) Jeśli energia stanu podstawowego wynosi  $E_0$  to ile będzie wynosić energia elektronu w stanie  $|\psi\rangle$ ? Odpowiedź uzasadnij bez zbędnych obliczeń.
- (D) Znajdź średnią odległość cząstki znajdującej się w stanie  $|\psi\rangle$  od źródła potencjału sferycznie symetrycznego w atomie wodoru.
2. Stan elektronu w atomie wodoru jest opisany przez funkcję falową

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{r}{a_0} \right) e^{-r/2a_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta \cos \phi, \quad (3)$$

gdzie  $a_0$  jest promieniem Bohra.

- (A) Znajdź rozkład funkcji falowej na stany własne hamiltonianu atomu wodoru.
- (B) Wyznacz średni rzut momentu pędu na oś  $z$  i średni kwadrat momentu pędu.
- (C) Oblicz średnią odległość elektronu od źródła potencjału.

Części radialne i sferyczne rozwiązania równania Schrödingera dla atomu wodoru dane są przez:

$$R_{10} = 2 \left( \frac{1}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-r/a_0}, \quad R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( \frac{r}{a_0} \right) e^{-r/2a_0}, \quad R_{20} = 2 \left( \frac{1}{2a_0} \right)^{\frac{3}{2}} \left( 1 - \frac{r}{2a_0} \right) e^{-r/2a_0}$$
$$Y_0^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}, \quad Y_1^{-1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}, \quad Y_1^1 = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \sin \theta e^{i\phi}, \quad Y_1^0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta$$

*Wskazówka:* pamiętaj o ortonormalności powyższych funkcji własnych. Jeśli zapomnisz przydatne mogą być całki:

$$\int x^2 e^{ax} dx = e^{ax} \left( \frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3} \right) + C$$
$$\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C, \quad \int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{2} \cos^2 x + C$$