Zadania - Mathematica

Zad. 0

Oblicz wartość $\sqrt{2}$ z dokładnością do 100 cyfr w zapisie dziesietnym.
Zad. 1

Ile jest końcowych zer w zapisie dziesiętnym 2010! ?
Zad. 2

Wymnóż $(a+b)^6$
Zad. 3

Zapisz w postaci iloczynowej $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
Zad. 4

Oblicz następujące sumy:

1.
$$S(n) = 1 + 2 + \ldots + n$$

2.
$$S(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$$

3.
$$S(n) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

Zad. 5

Oblicz granice:

1.
$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[100]{n^{100} + n^{99}} - n$$

Odp: $\frac{1}{100}$

2.
$$\lim_{n \to \infty} n^2 \left[\left(1 + \frac{p}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{q}{n}\right)^p \right]$$

Odp. $-\frac{pq(p-q)}{2}$

3.
$$\lim_{n \to \infty} 2^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 + \frac{n}{n}\right)$$

Odp. 0

4.
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^5 + 2^5 + \ldots + n^5}{n^6}$$

Odp. $\frac{1}{6}$

Zad. 6

Oblicz pochodną wielomianu $w(x) = ax^5 + (b+1)x^3 + 7x + 1$
Zad. 7

Oblicz $f^{(10)}(x)$ oraz $f^{(10)}(0)$ dla $f(x) = x^2 \cos(2x)$
Zad. 8

Oblicz całki. Otrzymany wynik sprawdź przez różniczkowanie.

1. $$\int (x^2 - 2x + 3)e^x dx$$

2. $$\int \sqrt{x}(\ln x)^2 dx$$

3. $$\int \frac{x^4}{x^2+1} dx$$

4. $$\int \frac{1}{x + \sqrt{x - x^2}} dx$$

5. $$\sqrt{e^{2x} + 2e^x + 4} dx$$

Zad. 9

Rozwiąż równanie $ax^2+bx+c = 0$ i następnie sprawdź uzyskane rozwiązania.
Zad. 10

Zdefiniuj dwie funkcje:

$$f(x) = e^{-x+2}$$

i

$$g(x) = x^3 - 30x + 30$$

Narysuj obie funkcje na jednym rysunku, tak żeby widać było ich punkty przecięcia.
Znajdź wszystkie rozwiązania równania f(x)=g(x)
Zad. 11

Armata strzela pod kątem α, względem powierzchni Ziemi, pociskiem o masie m nadając mu prędkość początkową v_0. Rozwiąż równanie ruchu biorąc pod uwagę współczynnik oporu powietrza κ (załóż siłę oporu proporcjonalną do prędkości). Znajdź zasięg dla danych m=4.1 kg,$v_0 = 439$m/s, κ=0.92 kg/s oraz dla kątów $\alpha = 5°, 30°, 45°$ (dane dla armaty 12-funtowej z 1853 roku). Narysuj wykresy prezentujące te trzy trajektorie. Załóż że armata stoi w początku układu współrzędnych. Rozwiązania przedstaw w postaci dwóch funkcji dwóch zmiennych: α i

t. Użyj zdefiniowanych funkcji w funkcji Manipulate, żeby narysować trajektorię dla zmienianych suwakiem wartości α.

Zad. 12

Zdefiniuj każdą ze składowych macierzy z poniższego wzoru jako odpowiednio: macierz A, B i C. W definicji macierzy uwzględnij, że s_{ij} to $\sin(\theta_{ij})$, a c_{ij} to $\cos(\theta_{ij})$. Następnie wymnoż macierze przez siebie i nadaj jej nazwę U. Powstała macierz to macierz oscylacji neutrin. Znajdź wyznacznik tej macierzy, macierz odwrotną i pokaż że iloczyn macierzy i macierzy odwrotnej do U daje macierz jednostkową.

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{c}_{23} & \mathrm{s}_{23} \\ 0 & -\mathrm{s}_{23} & \mathrm{c}_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{c}_{13} & 0 & \mathrm{s}_{13}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{s}_{13}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta} & 0 & \mathrm{c}_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{c}_{12} & \mathrm{s}_{12} & 0 \\ -\mathrm{s}_{12} & \mathrm{c}_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Zad. 13

Dane są funkcje

$$f(x) = \sin(x) \tag{2}$$

$$g(x) = \frac{1}{\pi}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1 \tag{3}$$

Znajdź miejsce przecięcia się tych funkcji (analitycznie lub numerycznie) oraz kąt pod jakim się przecinają (dla jednego, wybranego punktu). Narysuj wykres na którym zaprezentowane będą funkcje, oraz styczne w punkcie przecięcia.

Wskazówka Kąt pod jakim przecinają się krzywe określony jest jako kąt pod jakim przecinają się styczne do tych krzywych poprowadzone w punkcie przecięcia. Styczna do krzywej w punkcie $(x_0, y_0 = f(x_0))$ opisana jest równaniem

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{4}$$

Natomiast kąt przecięcia pomiędzy krzywymi $f(x)$ i $g(x)$, jeżeli przecinają się one w punkcie x_0 będzie równy

$$\tan\alpha = \left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)}\right|, \tag{5}$$

jeżeli mianownik tej równości jest równy 0 to kąt przecięcia jest równy $\pi/2$.

Zad. 14

- Wczytaj do macierzy dane z pliku ~`kaste/dane_python/funkcja2.dat`.
- Sprawdź rozmiar macierzy
- Wyświetl na ekranie pierwszą i drugą kolumnę macierzy
- Wyświetl ostatni wiersz macierzy
- Dopasuj do punktów funkcję $f(x) = a * e^{\frac{-(x-m)^2}{2s^2}} + b * e^{\frac{-(x-n)^2}{2r^2}} + h$
    1. Zdefiniuj funkcję zależną od x i tylu argumentów ile jest parametrów.
    2. W celu ustawienia optymalnych początkowych wartości parametrów użyj funkcji Manipulate.

3. Przy dopasowaniu zwróć uwagę na to, żeby użyć błędów punktów.
4. Ustaw parametry początkowe

- Narysuj punkty z błędami.
- Dodaj do rysunku dopasowaną krzywą.
- Dodaj ramkę i opis osi. Przetestuj inne opcje formatowania rysunku.
- Wypisz na ekran wartości dopasowanych parametrów i ich błędy.
- Wyeksportuj wartości otrzymanych parametrów i ich błędów do pliku parametry.txt
- Zapisz (wyeksportuj) rysunek do pliku fit.pdf.

Zad. 15

Mamy pole elektryczne i magnetyczne skrzyżowane pod pewnym dowolnym kątem. W obszar tych pól wpada cząstka o masie m i ładunku q z dowolnie skierowaną prędkością początkową. Znajdź ruch tej cząstki. Narysuj trójwymiarowy tor ruchu cząstki.

Wskazówka Układ współrzędnych można dobrać tak, aby pole E miało składową tylko w osi X, a pole B tylko w płaszczyźnie XY. Wtedy $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$, $\vec{B} = (B_x, B_y, 0)$. Równania ruchu dla takich pól wyglądają następująco:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} m\ddot{x} & = & -qE_x - B_y\dot{z} \\ m\ddot{y} & = & B_x\dot{z} \\ m\ddot{z} & = & B_y\dot{x} - B_x\dot{y} \end{array} \right. \tag{6}$$

Warunki początkowe możemy dobrać następująco: $\vec{r}(0) = (0, 0, 0)$, $\vec{v} = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$. Narysuj rozwiązanie dla danych: $m = 1, q = 1, E_x = 0.1, B_x = 0.1, B_y = 1, v_{x0} = 1, v_{y0} = 1, v_{z0} = 0.1$.