

Dokument w budowie.

Wszelkie uwagi, zastrzeżenia i komentarze
(za które będę bardzo wdzięczny)
proszę przysyłać na mój adres e-mail
(widoczny w lewym górnym rogu).

Spis treści

1	Pochodne i całki	1
2	Rachunek wektorowy	2
3	Macierze. Działanie macierzy na wektor	4
4	Opis ruchu – położenie, prędkość, przyspieszenie, (parametryczne) równanie toru	5
5	Współrzędne biegunowe	6
6	Zasady dynamiki Newtona	7
6.1	Przykład – siła dośrodkowa w jednostajnym ruchu po okręgu	7
7	Układy nieinercjalne, siły bezwładności	8
7.1	Układ przemieszczający się	8
7.2	Układ obracający się	8
8	Zasada zachowania pędu	9
9	Praca. Zasada zachowania energii	9
9.1	Zasada zachowania energii	10
10	Ruch obrotowy bryły sztywnej. Zasada zachowania momentu pędu	10
10.1	Zasada zachowania momentu pędu	11
10.2	Porównanie równań ruchu: ruch obrotowy a ruch postępowy	11
11	Ruch środka masy. Całkowita energia ruchu	12
12	Ruch w polu siły centralnej. Prawa Keplera	12
12.1	Prawa Keplera	13
13	Szczególna teoria względności	14
13.1	Postulaty STW. Transformacja Lorentza	14
13.2	Diagram Minkowskiego. Stożek światła, linia świata, interwał czasoprzestrzenny	14
13.3	Transformacja energii i pędu. Energia spoczynkowa i całkowita	16
13.4	Układ środka masy. Masa niezmiennicza układu	17
13.5	Relatywistyczny efekt Dopplera	17
A	Przyspieszenie w układzie obracającym się	18
B	Wyprowadzenie I i III prawa Keplera	20
C	Wyprowadzenie transformacji Lorentza	22
D	Relatywistyczny pęd i energia spoczynkowa – uzasadnienie	24
E	Relatywistyczny efekt Dopplera – wyprowadzenie	25

1 Pochodne i całki

Pochodną $f'(x)$ funkcji f w punkcie x definiujemy jako:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Funkcje, dla których pochodna istnieje w danym punkcie, nazywamy **różniczkowalnymi** w danym punkcie. Przykładem funkcji nieróżniczkowalnej jest $f(x) = |x|$ w punkcie $x = 0$ (dostajemy 1, jeśli zbiegamy od strony dodatniego ε , lub -1 , gdy zbiegamy od strony ujemnego ε).

Dla $k = 2, 3, 4, \dots$ definiujemy rekurencyjnie **k -tą pochodną** jako pochodną $(k - 1)$. pochodnej. Pochodne można oznaczać na dwa sposoby:

$$\begin{array}{ll} f'(x), f''(x), f^{(3)}(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots & \text{notacja Lagrange'a} \\ \frac{df}{dx}(x), \frac{d^2f}{dx^2}(x), \frac{d^3f}{dx^3}(x), \frac{d^4f}{dx^4}(x), \frac{d^5f}{dx^5}(x), \dots & \text{notacja Leibniza} \end{array}$$

Ponadto, pochodną po czasie można oznaczać kropkami – jest to tzw. notacja Newtona:

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \dot{\alpha}(t) \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2}(t) = \ddot{\alpha}(t)$$

Podstawowe własności:

$$\begin{array}{ll} \forall a \in \mathbb{R} \quad (af + g)' = af' + g' & \text{liniowość} \\ (f \cdot g)' = f'g + fg' & \text{pochodna iloczynu (tzw. wzór Leibniza)} \\ f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) & \text{pochodna funkcji złożonej} \end{array}$$

Przykłady:

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$

Funkcją pierwotną funkcji ciągłej $f(x)$ nazywamy funkcję $F(x)$ spełniającą

$$F'(x) = f(x).$$

Funkcja pierwotna jest określona z dokładnością do stałej addytywnej, bo

$$(F(x) + c)' = F'(x).$$

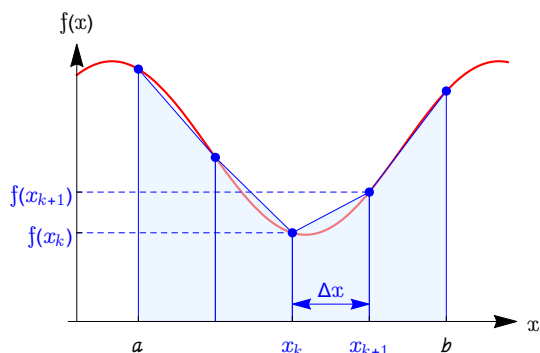
Całką oznaczoną z funkcji ciągłej $f(x)$ po przedziale $[a, b]$ nazywamy różnicę obliczonych na końcach przedziału wartości funkcji pierwotnej:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Równoważnie, można definiować całkę jako pole pod wykresem funkcji. Będzie ono równe następującej granicy (co pozwala zrozumieć, skąd wzięła się notacja – pierwotnie symbol „ f ” (stylizowane s) oznaczał *sumowanie* nieskończenie wielu małych pól o szerokości dx):

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \Delta x,$$

gdzie $x_k = a + k \cdot \Delta x$ i $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Każdy składnik sumy to pole trapezu o wysokości Δx i podstawach $f(x_k)$, $f(x_{k+1})$.



Podstawowe własności:

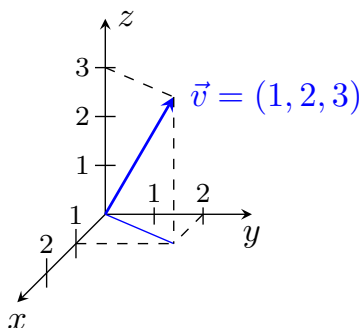
$$\forall c \in \mathbb{R} \quad \int_a^b (cf + g) dx = c \int_a^b f dx + \int_a^b g dx \quad \text{liniowość}$$

$$\int_a^b (f' \cdot g) dx = (f \cdot g) \Big|_a^b - \int_a^b (f \cdot g') dx \quad \text{całka iloczynu (bezpośrednia konsekwencja wzoru Leibniza)}$$

$$\int_a^b f(w(x)) dx = \int_{w(a)}^{w(b)} f(w) \frac{dw}{w'} \quad \text{zamiana zmiennych (łatwo zapamiętać: „} dw = \frac{dw}{dx} dx \text{”)}$$

2 Rachunek wektorowy

Dany wektor $\vec{v}$ można określić przez podanie jego współrzędnych, np.:



Wektory jednostkowe w kierunkach zgodnych z osiami układu współrzędnych nazywamy **wersorami** i oznaczamy przez $\vec{e}$ z odpowiednim indeksem. **Składowymi** wektora są wektory – rzuty na osie układu współrzędnych. **Współrzednymi** są długości tych rzutów z odpowiednim znakiem.

Przykład:

$$\begin{aligned} \text{wektor:} \quad & \vec{v} = (1, 2, 3) = 1 \cdot \vec{e}_x + 2 \cdot \vec{e}_y + 3 \cdot \vec{e}_z \\ \text{współrzędne:} \quad & v_x = 1, \quad v_y = 2, \quad v_z = 3 \\ \text{składowe:} \quad & \vec{v}_x = 1 \cdot \vec{e}_x = (1, 0, 0) \\ & \vec{v}_y = 2 \cdot \vec{e}_y = (0, 2, 0) \\ & \vec{v}_z = 3 \cdot \vec{e}_z = (0, 0, 3) \end{aligned}$$

Wektory można zapisywać poziomo bądź pionowo. Przekształcenie wektora poziomego na pionowy (i odwrotnie) nazywamy **transpozycją** i oznaczamy literą T w indeksie górnym:

$$(1, 2, 3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^T = (1, 2, 3)$$

W dalszej części notatek będziemy utożsamiać te dwa zapisy¹.

Długość (moduł) wektora to pierwiastek sumy kwadratów jego współrzędnych:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

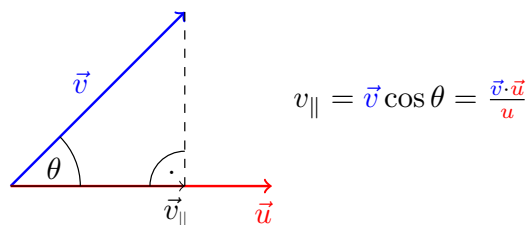
Iloczyn skalarny dwóch wektorów oznaczamy kropką i definiujemy na jeden z równoważnych sposobów:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{u} &= vu \cos \theta = \\ &= v_x \cdot u_x + v_y \cdot u_y + v_z \cdot u_z = \\ &= \sum_{i=x,y,z} v_i u_i = \\ &= \sum_{i,j=x,y,z} \delta_{ij} \cdot v_i u_j, \end{aligned}$$

gdzie θ to kąt pomiędzy wektorami, zaś δ_{ij} to tzw. **delta Kroneckera**, zdefiniowana następująco:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

Iloczyn skalarny ma związek z rzutem prostopadłym jednego wektora na kierunek drugiego:



Iloczyn wektorowy dwóch wektorów oznaczamy krzyżykiem i definiujemy na jeden z równoważnych

¹W ogólności zapis pionowy oznacza wektory, zaś poziomy – tzw. kowektory, czyli obiekty z przestrzeni dualnej do przestrzeni wektorowej. Na poziomie Fizyki I to rozróżnienie jest nieistotne.

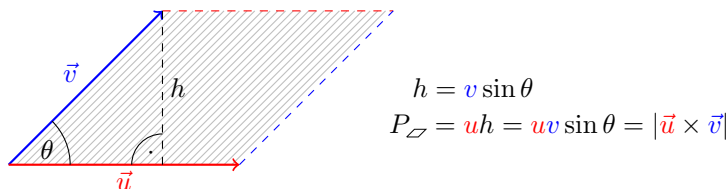
sposobów:

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{u} &= vu \sin \theta \cdot \vec{e}_\perp = \\ &= \begin{pmatrix} v_y u_z - v_z u_y \\ v_z u_x - v_x u_z \\ v_x u_y - v_y u_x \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i,j,k=x,y,z} \epsilon_{ijk} \cdot v_i u_j \cdot \vec{e}_k = \\ &= \det \begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ u_x & u_y & u_z \end{bmatrix},\end{aligned}$$

gdzie $\vec{e}_\perp$ to wektor prostopadły do płaszczyzny rozpiętej przez $\vec{v}$ i $\vec{u}$, którego kierunek wyznaczamy z reguły prawej dłoni, $\det$ oznacza wyznacznik macierzy², zaś ϵ_{ijk} to tzw. **symbol Levi-Civita** (lub **tensor całkowicie antysymetryczny**), zdefiniowany przez następujące własności:

$$\begin{aligned}\epsilon_{xyz} &= 1 & \epsilon_{ijj} &= 0 \\ \epsilon_{ijk} &= \epsilon_{kij} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}\end{aligned}$$

Długość iloczynu wektorowego wektorów $\vec{v}$ i $\vec{u}$ to pole powierzchni równoległoboku rozpiętego przez wektory $\vec{v}$ i $\vec{u}$:



3 Macierze. Działanie macierzy na wektor

Uwaga: Macierze są używane w niniejszych notatkach wyłącznie w części dotyczącej szczególnej teorii względności (i w jednym miejscu przy iloczynie wektorowym).

Macierz o wymiarach $k \times n$ to tabelka wypełniona liczbami, licząca k wierszy i n kolumn, odpowiadająca pewnemu przekształceniu liniowemu z przestrzeni $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$. Macierz w działaniu na dany wektor z $\mathbb{R}^n$ daje jego obraz z $\mathbb{R}^k$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{x} \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{x} \\ \vdots \\ \vec{a}_k \cdot \vec{x} \end{pmatrix},$$

gdzie $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. Dla przykładu, niech $k = 2$, $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by + cz \\ dx + ey + fz \end{pmatrix}.$$

²Macierze i ich wyznaczniki są dokładnie omawiane na Algebrze I. Krótkie wprowadzenie zawiera sekcja 3.

Macierze można składać (mnożyć) – odpowiada to składaniu przekształceń liniowych:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_1 \cdot \vec{b}_m \\ \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_2 \cdot \vec{b}_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{a}_k \cdot \vec{b}_1 & \vec{a}_k \cdot \vec{b}_2 & \dots & \vec{a}_k \cdot \vec{b}_m \end{bmatrix},$$

gdzie $\vec{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$, $\vec{b}_i = (b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ni})$. Dla przykładu, niech $k = 2$, $n = 3$, $m = 3$:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aA + bD + cG & aB + bE + cH & aC + bF + cI \\ dA + eD + fG & dB + eE + fH & dC + eF + fI \end{bmatrix}.$$

Uwaga: Mnożenie macierzy nie jest przemienne.

4 Opis ruchu – położenie, prędkość, przyspieszenie, (parametryczne) równanie toru

Ruch danego ciała możemy opisać, podając wektor jego położenie $\vec{r}$ w zadanym układzie współrzędnych w każdej chwili czasu:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Prędkością ciała (najczęściej oznaczaną przez $\vec{v}$) nazywamy pochodną wektora położenia po czasie, zaś **przyspieszeniem** (najczęściej oznaczanym przez $\vec{a}$) – drugą pochodną wektora położenia po czasie:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

Równanie $\vec{r} = \vec{r}(t)$ nazywamy **parametrycznym równaniem toru**.

Równaniem toru nazywamy równanie opisujące geometryczny kształt toru, bez uwzględniania zależności położenia od czasu.

Równanie toru można uzyskać z parametrycznego równania toru przez eliminację zmiennej t . Odwrotna procedura nie jest możliwa (o ile nie posiadamy dodatkowej informacji, np. o zależności prędkości od położenia).

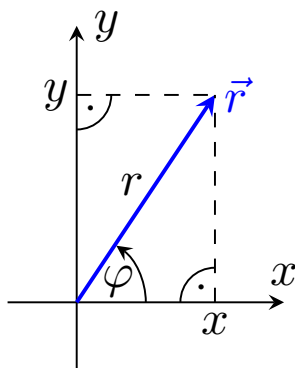
Ważne: tor jest wykresem wektorowej funkcji $\vec{r}(t)$. W takim razie **prędkość chwilowa musi być styczna do toru**, jest bowiem pochodną funkcji położenia.

Ważne: równanie toru nie opisuje ruchu w sposób kompletny! Przykłady:

typ ruchu (na płaszczyźnie)	parametryczne równanie toru	równanie toru
ruch jednostajny prostoliniowy z prędkością v równoległą do osi Ox	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} vt + x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$	$y = y_0$
ruch prostoliniowy z prędkością $v(t) = 2at$ równoległą do osi Ox	$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} at^2 + x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$	
ruch po okręgu o promieniu R ze stałą prędkością kątową ω	$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi_0) \\ \sin(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix}$	$x^2 + y^2 = R^2$
ruch po okręgu o promieniu R z prędkością kątową $\omega(t) = 2\varepsilon t$	$\vec{r}(t) = R \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon t^2 + \varphi_0) \\ \sin(\varepsilon t^2 + \varphi_0) \end{pmatrix}$	

5 Współrzędne biegunowe

Położenie na płaszczyźnie możemy opisywać nie tylko przy pomocy współrzędnych kartezjańskich (x, y) . Możemy też użyć tzw. **współrzędnych biegunowych** (r, φ) , zdefiniowanych następująco:



r – odległość od środka układu współrzędnych
 φ – kąt od osi Ox do wektora wodzącego

Zależność pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a biegunowymi ma postać:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$$

Wersory:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \varphi \cdot \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cdot \vec{e}_y \end{cases}$$

Co ważne, **wersory układu biegunowego są zależne od położenia** (np. kierunek wersora $\vec{e}_r$ dla $\varphi = 0$ jest zgodny z kierunkiem osi Ox , zaś dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – zgodny z kierunkiem osi Oy). W związku z tym, różniczkując wektor we współrzędnych biegunowych należy pamiętać, że (w przeciwieństwie do wersorów układu kartezjańskiego) w ogólności wersory układu biegunowego **mają niezerową pochodną**:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{e}}_r &= \frac{d}{dt} [\cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \varphi \cdot \vec{e}_y] = \\ &= \dot{\varphi} \cdot [-\sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cdot \vec{e}_y] = \\ &= \dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \\ \dot{\vec{e}}_\varphi &= \frac{d}{dt} [-\sin \varphi \cdot \vec{e}_x + \cos \varphi \cdot \vec{e}_y] = \\ &= -\dot{\varphi} \cdot [\cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \varphi \cdot \vec{e}_y] = \\ &= -\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_r \end{aligned}$$

Warto przy okazji zauważyć, że **w dowolnym układzie współrzędnych pochodna wersora jest do niego prostopadła**:

$$\begin{aligned} |\vec{e}| &= 1 \\ \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{e} &= 1 & \left| \frac{d}{dt}(\dots) \right. \\ \Rightarrow 2 \dot{\vec{e}} \cdot \vec{e} &= 0 \\ \Rightarrow \dot{\vec{e}} &\perp \vec{e} \end{aligned}$$

Intuicyjnie jest to jasne – gdyby pochodna miała składową równoległą do wersora, to jego długość musiałaby się zmieniać, co jest sprzeczne z definicją wersora.

Korzystając ze wzorów na pochodne wersorów, obliczmy prędkość i przyspieszenie w układzie biegunowym:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \cdot \vec{e}_r \\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \\ &= \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \dot{\vec{e}}_r = \\ &= \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \\ \vec{a} &= \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}} = \\ &= \frac{d}{dt}[\dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi] = \\ &= \ddot{r} \cdot \vec{e}_r + \dot{r} \cdot \dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi} \cdot \dot{\vec{e}}_\varphi = \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) \cdot \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) \cdot \vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

6 Zasady dynamiki Newtona

- I. Istnieje **inercjalny układ odniesienia**, czyli taki, w którym ciało porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, jeśli wszystkie oddziaływania ciała z otoczeniem znoszą się.
- II. W układzie inercjalnym przyspieszenie jest proporcjonalne do wypadkowej siły działającej na ciało, $\vec{F} = m\vec{a}$.
- III. Jeśli ciało A działa na ciało B pewną siłą $\vec{F}$, to ciało B działa na ciało A siłą $-\vec{F}$.

Warto zauważyć, że do tej pory nie definiowaliśmy pojęcia „siła” w żaden sposób. Drugą zasadę dynamiki można więc potraktować jako **definicję siły** – jest to iloczyn masy³ i przyspieszenia. Zakres obowiązywania drugiej zasady w powyższej postaci jest ograniczony do ruchu nierelatywistycznego – w rzeczywistości ciało poddane działaniu stałej siły nie będzie przyspieszać w nieskończoność. Relatywistycznie poprawne jest za to sformułowanie

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

(zagadnienie to będzie szerzej omówione w sekcji poświęconej STW).

6.1 Przykład – siła dośrodkowa w jednostajnym ruchu po okręgu

W ruchu po okręgu o promieniu r ze stałą prędkością kątową ω położenie jest w następujący sposób zależne od czasu:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + \varphi_0) \\ r \sin(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix}.$$

Obliczmy przyspieszenie:

$$\vec{a}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = -\omega^2 \begin{pmatrix} r \cos(\omega t + \varphi_0) \\ r \sin(\omega t + \varphi_0) \end{pmatrix} = -\omega^2 \vec{r}.$$

³Ale czemu ta masa jest tą samą, która występuje w równaniach grawitacji? (vide przypis 4).

Z drugiej zasady dynamiki wynika, że ruch odbywa się pod wpływem siły skierowanej do środka okręgu:

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r} = -\frac{mv^2}{r} \vec{e}_r.$$

W przypadku kręcenia kulka na sznurku jest to siła naprężenia sznurka. Zauważmy, że siła jest prostopadła do prędkości – zmienia się kierunek prędkości, ale nie jej wartość.

7 Układy nieinercyjne, siły bezwładności

Rozważmy dwa układy: inercjalny U i poruszający się względem niego nieinercjalny układ U' . Obserwator w U' będzie odczuwał przyspieszenie wynikające ze zmiennej prędkości U' względem U . Obserwator ten będzie miał zatem wrażenie, że działają nań pewne „dodatkowe” siły, tzw. **siły bezwładności**.

7.1 Układ przemieszczający się

Załóżmy, że układ U' jest w danej chwili czasu t przesunięty względem U o wektor $\vec{R}(t)$, ale nie obraca się względem U (w takim razie kierunki wersorów układu U' będą stałe w czasie). Jeśli $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ oznaczają, odpowiednio, położenie, prędkość i przyspieszenie w układzie U , to w układzie U' wielkości te wyrażają się następująco:

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}(\dots)} \quad \vec{v}' = \vec{v} - \dot{\vec{R}} \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}(\dots)} \quad \vec{a}' = \vec{a} - \ddot{\vec{R}}.$$

Iloczyn $-m\ddot{\vec{R}}$ nazywamy **siłą bezwładności** działającą w nieinercjalnym układzie U' .

Ważne: siła bezwładności nie wiąże się z żadnym rzeczywistym oddziaływaniem⁴. Jest jedynie konsekwencją użycia takich a nie innych współrzędnych.

7.2 Układ obracający się

Załóżmy teraz, że początki układów współrzędnych przez cały czas się pokrywają, ale U' obraca się względem U z prędkością kątową⁵ $\vec{\Omega}$.

Zależność (wyprowadzona w dodatku A) pomiędzy przyspieszeniem w układzie U' a tym w układzie U jest następująca:

$$\vec{a}' = \vec{a} + \underbrace{(-2\vec{\Omega} \times \vec{v}')}_{\vec{a}_{\text{Cor.}}} + \underbrace{(-\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}'))}_{\vec{a}_{\text{odśr.}}} + \underbrace{(-\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}')}_{\vec{a}_{\text{azym.}}},$$

przy czym poszczególne składniki noszą nazwy:

$\vec{a}_{\text{Cor.}}$	– przyspieszenie Coriolisa,
$\vec{a}_{\text{odśr.}}$	– przyspieszenie odśrodkowe,
$\vec{a}_{\text{azym.}}$	– przyspieszenie azymutalne.

Ważne: podobnie jak poprzednio, nowe „siły” (Coriolisa, odśrodkowa i azymutalna) są konsekwencją „nieodpowiedzialnego” wyboru układu współrzędnych i nie wiążą się z żadnym rzeczywistym oddziaływaniem.

⁴Zwróćmy uwagę, że jak w U' wszystkie ciała doznają takiego samego przyspieszenia bezwładnościowego $-\ddot{\vec{R}}$, tak wszystkie ciała w (jednorodnym) polu grawitacyjnym doznają takiego samego przyspieszenia grawitacyjnego $\vec{g}$. A może grawitacja też jest konsekwencją zmiany układu odniesienia? Czemu masa „bezwładnościowa” jest równa masie „grawitacyjnej”? Takie pytania doprowadziły ludzi (Mach, Einstein) do zaskakujących wniosków.

⁵Wektor prędkości kątowej ma wartość taką, jak skalarna prędkość kątowa w płaszczyźnie obrotu, zaś kierunek i zwrot wyznacza reguła prawej dłoni (kierunek jest zgodny z osią obrotu).

8 Zasada zachowania pędu

Zasady zachowania są najbardziej fundamentalnymi i najszerszej wykorzystywanymi prawami fizyki. **Pęd układu jest zachowany, jeżeli siły zewnętrzne działające na układ równoważą się.**

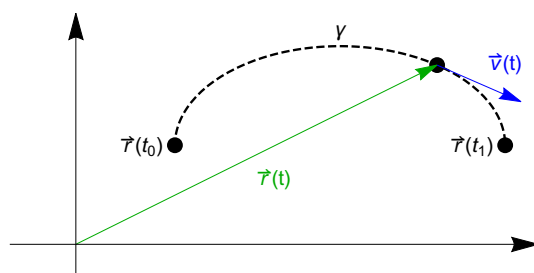
- Zasadę zachowania pędu można stosować dla każdego z kierunków (x, y, z) z osobna. Na przykład, jeżeli wózek poruszający się po torze powietrznym do przodu (wzdłuż Ox) rzucimy z lewej lub prawej strony (wzdłuż Oy) kulką, to pęd wózka wzdłuż toru nie zmieni się.
- Zasadę tę można powiązać z II zasadą dynamiki Newtona: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. Jeżeli pewna składowa siły się zeruje, to odpowiadająca jej składowa pędu ma zerową pochodną po czasie, a więc jest stała.

9 Praca. Zasada zachowania energii

Zdefiniujmy na początek **pracę** działającej na ciało siły $\vec{F}$ wzdłuż drogi γ jako całkę

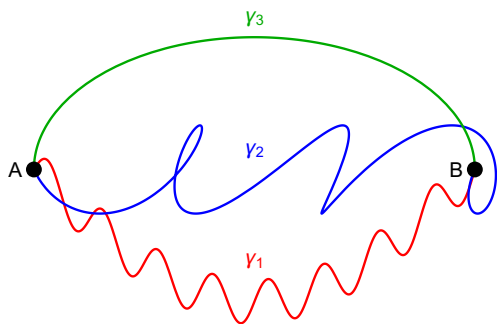
$$W(\gamma) = \int_{\gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{v}(t) dt, \quad \vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

(t_0 i t_1 to chwile, odpowiednio, rozpoczęcia i zakończenia ruchu po drodze γ). Definicję wektora wodzącego $\vec{r}$ przedstawia poniższy rysunek:



Zauważmy, że praca w ruchu prostoliniowym o stałym zwrocie, pod wpływem siły skierowanej zgodnie z kierunkiem ruchu, wyraża się prostym wzorem $W = F \cdot |\gamma|$, gdzie $|\gamma|$ to długość drogi.

Siłami zachowawczymi będziemy nazywali siły, których praca pomiędzy dwoma danymi punktami nie zależy od wyboru łączącej je drogi:



siła jest zachowawcza



$$W(\gamma_1) = W(\gamma_2) = W(\gamma_3) = W_{AB}$$

Siłami zachowawczymi są np. siła grawitacji czy siła sprężystości, oraz siły nie wykonujące pracy, jak siła Lorentza czy siła tarcia statycznego. Przykładem siły niezachowawczej jest siła tarcia kinetycznego.

Siła $\vec{F}$ jest **potencjalna**, jeśli jest ujemnym gradientem pewnej funkcji $V(\vec{r})$ (zwanej potencjałem):

$$\vec{F} = -\nabla V(\vec{r}) .$$

Przykładami sił potencjalnych są: siła grawitacji (w małej skali: $V = mgh$, w dużej: $V = -G\frac{Mm}{r}$), siła sprężystości ($V = \frac{kA^2}{2}$), siła Coulomba ($V = k\frac{q_1 \cdot q_2}{r}$). Każda siła potencjalna jest zachowawcza⁶, a jej pracę pomiędzy danymi punktami A i B określa różnica potencjałów:

$$W_{AB} = -[V(B) - V(A)] .$$

9.1 Zasada zachowania energii

Energia jest miarą pracy, jaką można wykonać układ. **Całkowita energia układu izolowanego** (czyli nieoddziaływującego z innymi układami) **jest zawsze⁷ zachowana**.

Całkowita energia jest sumą energii mechanicznej (tj. kinetycznej i potencjalnej) i innych jej form, np. energii cieplnej, chemicznej itd. **Energia mechaniczna jest zachowana, gdy wszystkie niezrównoważone siły działające na układ są zachowawcze.**

10 Ruch obrotowy bryły sztywnej. Zasada zachowania momentu pędu

Ruch **bryły sztywnej** – czyli takiej, której punkty pozostają w stałych odległościach względem siebie nawzajem – można rozłożyć na ruch postępowy (translacyjny) i ruch obrotowy (rotacyjny). Ruch translacyjny nie ma już przed nami tajemnic, zajmijmy się więc ruchem obrotowym.

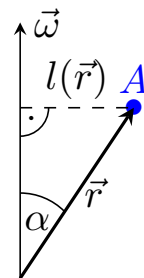
Załóżmy, że bryła obraca się względem osi przechodzącej przez dany punkt A . Prędkość liniowa danego punktu B jest sumą wektorową prędkości punktu A oraz prędkości B względem A , ta ostatnia zaś wyraża się iloczynem wektorowym prędkości kątowej i względnego położenia:

$$\dot{\vec{r}}_B = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{B/A} = \dot{\vec{r}}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} .$$

Zdefiniujmy moment bezwładności punktu materialnego A względem ustalonej osi jako iloczyn masy i kwadratu odległości od osi. Odległość od osi, l , możemy obliczyć jako:

$$l(\vec{r}) = r \sin \alpha = \frac{|\vec{\omega} \times \vec{r}|}{\omega} ,$$

gdzie $\vec{\omega}$ to prędkość kątowa, $\vec{r}$ to wektor prowadzący od dowolnego punktu osi do punktu A , zaś α to kąt pomiędzy wektorem $\vec{r}$ a osią (vide rysunek obok).



Moment bezwładności bryły sztywnej względem danej osi to suma momentów bezwładności jej punktów (w granicy nieskończenie wielu punktów – całka):

$$I = \sum_{i=1}^N m_i l_i^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_V \rho(\vec{r}) l^2(\vec{r}) d^3r .$$

⁶Niektórzy utożsamiają te dwa pojęcia, nie klasyfikując sił niewykonujących pracy jako zachowawczych. Wtedy zasada zachowania energii mechanicznej brzmi: „Energia mechaniczna jest zachowana, gdy wszystkie siły **wykonujące pracę nad układem** są zachowawcze.”

⁷Na poziomie klasycznym, relatywistycznym, kwantowym i każdym innym. **Zawsze.**

Energia ruchu obrotowego bryły wokół ustalonej osi wyraża się jako

$$E_{\text{obr}} = \frac{1}{2} I \omega^2 .$$

Wyprowadźmy ten wynik dla przypadku skończonego N :

$$E_{\text{obr}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\vec{\omega} \times \vec{r}_i}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i l(\vec{r})^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 .$$

Zdefiniujmy również **moment siły** $\vec{F}$ względem danej osi jako iloczyn wektorowy

$$\vec{M} = \vec{l}_F \times \vec{F} ,$$

gdzie $\vec{l}_F$ jest wektorem prostopadłym do osi, biegnącym od osi do punktu przyłożenia siły $\vec{F}$ (jest to tzw. **ramię siły** $\vec{F}$).

Równanie ruchu obrotowego względem ustalonej osi ma postać

$$\vec{M} = I \vec{\varepsilon} ,$$

gdzie $\vec{M}$ to całkowity moment siły działający na bryłę, I – moment bezwładności względem osi, $\vec{\varepsilon}$ – przyspieszenie kątowe.

Zdefiniujmy **moment pędu** punktu materialnego względem osi

$$\vec{L} = \vec{l}(\vec{r}) \times \vec{p} = m l^2 \vec{\omega}$$

oraz moment pędu bryły jako sumę (całkę) momentów pędu jej punktów

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i l_i^2 \vec{\omega} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \vec{\omega} \int_V \rho(\vec{r}) l^2(\vec{r}) d^3 r = I \vec{\omega} .$$

Stąd równanie ruchu obrotowego można zapisać jako

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} .$$

10.1 Zasada zachowania momentu pędu

Z powyższej formy równania ruchu wynika natychmiast zasada zachowania momentu pędu: **jeśli całkowity moment sił działający na ciało względem danej osi wynosi zero, to moment pędu ciała względem tej osi jest stały**:

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{const}$$

10.2 Porównanie równań ruchu: ruch obrotowy a ruch postępowy

ruch postępowy (translacja)	ruch obrotowy (rotacja)
masa m	moment bezwładności I
prędkość $\vec{v}$, przyspieszenie $\vec{a}$	prędkość kątowa $\vec{\omega}$, przyspieszenie kątowe $\vec{\varepsilon}$
pęd: $\vec{p} = m\vec{v}$	moment pędu: $\vec{L} = I\vec{\omega}$
siła: $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	moment siły: $\vec{M} = I\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
energia: $E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$	energia: $E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$

11 Ruch środka masy. Całkowita energia ruchu

Środek masy danego układu N punktów (bryły sztywnej) jest zdefiniowany jako punkt, którego położenie $\vec{r}_{\text{cm}}$ jest dane następująco:

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} d^3r ,$$

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_V \rho(\vec{r}) d^3r \quad (\text{całkowita masa układu}) .$$

Innymi słowy, jest to średnia ważona położenia punktów bryły, przy czym wagą danego wektora położenia jest masa odpowiadającego mu punktu.

Ruch danego punktu układu możemy rozłożyć na ruch środka masy i ruch punktu względem środka masy. Skoro rozpatrujemy bryłę sztywną, odległość od środka masy nie zmienia się, a zatem ruch względem środka masy jest ruchem obrotowym względem osi przechodzącej przez środek masy:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_{\text{cm}} + (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_{\text{cm}}) = \dot{\vec{r}}_{\text{cm}} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{\text{cm}}) .$$

Stąd **całkowita energia ruchu bryły sztywnej jest sumą energii ruchu postępowego środka masy (z masą równą masie całkowitej) i energii rotacji względem osi przechodzącej przez środek masy:**

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{cm}} + E_{\text{obr}} = \frac{M \vec{v}_{\text{cm}}^2}{2} + \frac{I_{\text{cm}} \omega^2}{2} .$$

Warto zauważyć, że zamiast środka masy moglibyśmy w powyższym równaniu wybrać dowolny inny punkt bryły. Środek masy ma jednak tę przewagę nad innymi punktami, że równanie jego ruchu zawiera wyłącznie siły zewnętrzne. **Równanie ruchu środka masy to równanie ruchu całkowitej masy układu pod wpływem wypadkowej sił zewnętrznych** działających na układ. Łatwo to pokazać, obliczając iloczyn całkowitej masy i drugiej pochodnej położenia środka masy po czasie (ograniczymy się do przypadku skończonego N):

$$M \ddot{\vec{r}}_{\text{cm}} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i + \vec{W}_i) = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i .$$

Trzecia równość to II zasada dynamiki Newtona w zastosowaniu do każdego punktu układu. Jako $\vec{F}_i$ oznaczyliśmy siłę zewnętrzną działającą na dany punkt, a jako $\vec{W}_i$ – siłę wewnętrzną, pochodzącą od oddziaływania z resztą układu. Siły wewnętrzne znoszą się na mocy III zasady dynamiki: jeśli i -ty punkt działa pewną siłą na j -ty, to j -ty działa na i -ty z siłą przeciwną; wektorowa suma tych sił wynosi 0.

12 Ruch w polu siły centralnej. Prawa Keplera

Siłą centralną nazywamy siłę, której wartość zależy od odległości od danego punktu, zwanego **centrum siły**, zaś kierunek jest wyznaczony przez wektor prowadzący od centrum siły do danego ciała:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \vec{e}_r .$$

Ruch pod wpływem siły centralnej jest ruchem płaskim i odbywa się w płaszczyźnie wyznaczonej przez wektor początkowej prędkości ciała oraz wektor położenia. Możemy sprawdzić, że składowa przyspieszenia prostopadła do tej płaszczyzny wynosi 0:

$$\ddot{\vec{r}} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = F(r) \cdot \vec{e}_r \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{r}) = 0$$

(gdyż wektor $\dot{\vec{r}} \times \vec{r}$ jest prostopadły do $\vec{e}_r$), a zatem ciało nie nabiera prędkości w kierunku prostopadłym.

Siła centralna jest szczególnym przypadkiem siły potencjalnej, dla potencjału zależącego wyłącznie od odległości od centrum:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \xrightarrow{V(\vec{r})=V(r)} -V'(r) \cdot \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = -V'(r) \cdot \vec{e}_r .$$

Przykłady:

- siła grawitacji: $\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{Mm}{r^2} \cdot \vec{e}_r$, $V(r) = -\frac{GMm}{r}$,
- siła Coulomba: $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2} \cdot \vec{e}_r$, $V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r}$,
- siła sprężystości: $\vec{F}(\vec{r}) = -kr \cdot \vec{e}_r$, $V(r) = \frac{1}{2}kr^2$.

Siła centralna jest potencjalna, jest więc zachowawcza. W związku z tym **ruch pod wpływem siły centralnej jest ruchem o stałej energii**:

$$\vec{F} - \text{centralna} \Rightarrow E = \text{const} .$$

Moment siły centralnej względem osi prostopadłej do płaszczyzny ruchu przechodzącej przez centrum wynosi 0 (siła jest skierowana wzdłuż ramienia). W związku z tym **ruch pod wpływem siły centralnej jest ruchem o stałym momencie pędu**:

$$\vec{F} - \text{centralna} \Rightarrow \vec{L} = \text{const} .$$

12.1 Prawa Keplera

Jeśli siła centralna wyraża się wzorem $\vec{F} = -\frac{\alpha}{r^2} \cdot \vec{e}_r$ dla pewnej stałej $\alpha > 0$ (warunek ten spełniają np. siła grawitacji i siła Coulomba dla ładunków różnoimiennych), to do ruchu ciała pod wpływem siły stosują się **prawa Keplera:**

- Torem ruchu jest krzywa stożkowa, w której ognisku (dla dwóch ognisk – w jednym z nich) znajduje się centrum siły.
- Prędkość polowa (pole zakreślane przez wektor wodzący w jednostce czasu) jest stała.
- Dla orbity zamkniętej (eliptycznej bądź kołowej) stosunek kwadratu okresu obiegu centrum do sześciu pól wielkiej (w przypadku orbity kołowej – promienia) tej orbity wynosi

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha}$$

(zauważmy, że dla ruchu planety wokół Słońca $\frac{m}{\alpha} = \frac{1}{GM}$ – nie zależy od m).

Drugie prawo Keplera wynika z zasady zachowania momentu pędu:

$$\frac{d}{dt} S = \frac{1}{2} |\dot{\vec{r}}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \text{const} ,$$

gdzie α to kąt pomiędzy wektorem wodzącym a prędkością ciała. Wyprowadzenie I i III prawa znajduje się w dodatku B.

13 Szczególna teoria względności

13.1 Postulaty STW. Transformacja Lorentza

Szczególna teoria względności opiera się na następujących założeniach:

- I. **Wszystkie układy inercjalne są równouprawnione** (zasada względności). Oznacza to, że prawa fizyki (równania ruchu itp.) powinny mieć analogiczną postać we wszystkich układach inercjalnych⁸. Znaczący to też, że żaden punkt w czasoprzestrzeni nie powinien być wyróżniony specjalną postacią równań.
- II. **Wartość prędkości światła w próżni w każdym inercjalnym układzie odniesienia jest taka sama** i wynosi $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. W szczególności, wartość ta jest skończona.

Pierwsze założenie jest wymogiem teoretycznej elegancji praw rządzących światem, drugie zaś jest czysto doświadczalne. Zauważmy, że pierwsze założenie nie obowiązywałoby, gdyby np. istniało wyróżnione, nieruchome centrum Wszechświata, zaś masa cząstki była zależna od odległości od owego centrum. Wszelkie wykonywane przez ludzkość doświadczenia wskazują jednak na słuszność zasady względności.

Transformacja Lorentza opisuje zmianę wartości współrzędnych czasoprzestrzennych przy przejściu pomiędzy układami poruszającymi się względem siebie jednostajnie. Niech (t, x, y, z) będą współrzędnymi w układzie U , zaś (t', x', y', z') – współrzędnymi w układzie U' , który porusza się względem U ze stałą prędkością v wzdłuż osi x . Transformacja ma postać:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot \gamma \cdot (t - \frac{v}{c^2} \cdot x) \\ \gamma \cdot (x - vt) \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

zaś c to prędkość światła w próżni. Wyprowadzenie transformacji Lorentza znajduje się w dodatku C. Łatwo sprawdzić, że wielkość $c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ jest zachowana przez transformację Lorentza:

$$\begin{aligned} c^2 (t')^2 - (x')^2 - (y')^2 - (z')^2 &= \gamma^2 [(c^2 t^2 - 2c\beta tx + \beta^2 x^2) - (c^2 \beta^2 t^2 - 2c\beta tx + x^2)] - y^2 - z^2 = \\ &= \gamma^2 [c^2 t^2 (1 - \beta^2) - x^2 (1 - \beta^2)] - y^2 - z^2 = \\ &= \gamma^2 \cdot \frac{1}{\gamma^2} (c^2 t^2 - x^2) - y^2 - z^2 = \\ &= c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \end{aligned}$$

Pierwiastek z tej wielkości nazywamy **czterodługością** czterowektora.

13.2 Diagram Minkowskiego. Stożek światła, linia świata, interwał czasoprzestrzenny

Tak jak podstawowym obiektem geometrii jest punkt, tak w STW rolę tę pełni **zdarzenie**. Zdarzenie ma w każdym układzie przyporządkowane współrzędne: czasową oraz przestrzenną.

⁸Ciekawym pytaniem, na razie bez odpowiedzi, jest natomiast: dlaczego pewne układy są inercjalne, a inne nie? Wszak jeśli U' przyspiesza względem inercjalnego U , to U przyspiesza względem U' – a tylko w układzie U' wystąpią tajemnicze siły bezwładności.

Zdarzenia można zaznaczać na **diagramie Minkowskiego** – w przypadku jednowymiarowym jego osi odpowiadają współrzędnej czasowej i przestrzennej. Trajektorię danego ciała na diagramie Minkowskiego nazywamy jego **linią świata**.

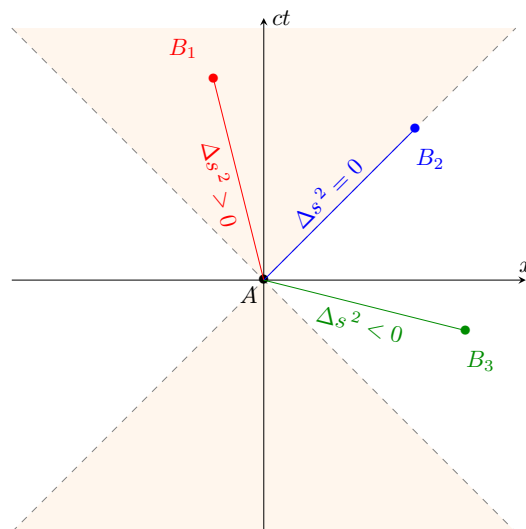
Linia świata spoczywającej cząstki to pionowa prosta, zaś linia świata cząstki poruszającej się jednostajnie jest prosta nachylona pod kątem $\alpha = \arctan(v/c)$. Linia świata fotonu jest nachylona do pionu pod kątem $\pi/4$.

Z każdym zdarzeniem można powiązać jego stożek świetlny – jest to wnętrze stożka wyciętego przez linie świata fotonów rozchodzących się od danego zdarzenia. Zdarzenia wewnątrz stożka świetlnego mogą być powiązane z danym przyczynowo, ponieważ możliwe jest wysłanie sygnału pomiędzy nimi. Zdarzenia spoza stożka świetlnego są niezwiązane przyczynowo z danym – nie mogą być jego przyczyną ani skutkiem.

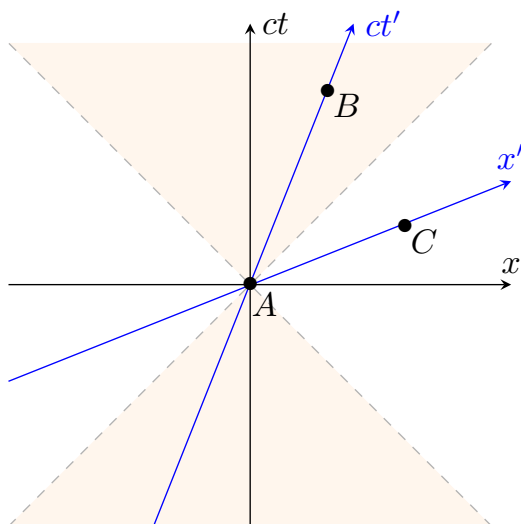
Dla dowolnych dwóch zdarzeń $A = (ct_A, x_A, y_A, z_A)$ i $B = (ct_B, x_B, y_B, z_B)$ definiujemy **interwał czasoprzestrzenny** pomiędzy nimi jako kwadrat czterodługości różnicy czterowektorów odpowiadających tym zdarzeniom:

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = \\ &= c^2 (t_B - t_A)^2 - (x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 - (z_B - z_A)^2.\end{aligned}$$

- Jeśli $\Delta s^2 > 0$ (interwał typu czasowego), to zdarzenie B (na obrazku: B_1) leży w stożku świetlnym zdarzenia A , więc może z nim być związane przyczynowo. Istnieje układ odniesienia, w którym te zdarzenia dzieją się w tym samym miejscu.
- Jeśli $\Delta s^2 = 0$ (interwał typu zerowego), to zdarzenie B (na obrazku: B_2) leży na krawędzi stożka świetlnego zdarzenia A , więc może z nim być związane przyczynowo. Nie istnieje natomiast układ odniesienia, w którym te zdarzenia dzieją się w tym samym miejscu (musiałby on poruszać się z prędkością światła).
- Jeśli $\Delta s^2 < 0$ (interwał typu przestrzennego), to zdarzenie B (na obrazku: B_3) leży poza stożkiem świetlnym zdarzenia A , więc nie może z nim być związane przyczynowo. Nie istnieje układ odniesienia, w którym te zdarzenia dzieją się w tym samym miejscu, ale istnieje układ odniesienia, w którym te zdarzenia są jednoczesne.



Transformacja Lorentza odpowiada odchyleniu osi diagramu Minkowskiego o pewien kąt:



Zdarzenie B leży w stożku świetlnym zdarzenia A . W układzie U' te zdarzenia dzieją się **w tym samym miejscu**.

Zdarzenie C leży poza stożkiem świetlnym zdarzenia A . W układzie U' te zdarzenia dzieją się **równocześnie**.

13.3 Transformacja energii i pędu. Energia spoczynkowa i całkowita

Czas i położenie danego zdarzenia tworzą tzw. **czterowektor** – nazywamy tak każdy zestaw czterech wielkości, które przy przejściu do układu poruszającego się względem danego ze stałą prędkością zachowują się zgodnie z transformacją Lorentza.

Poza czteropolożeniem istnieją też inne czterowektory. Jednym z nich jest **wektor czteropędu**:

$$(E/c, p_x, p_y, p_z),$$

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

zaś c to prędkość światła w próżni (uzasadnienie znajduje się w dodatku D). Wielkość E jest całkowitą energią cząstki, zaś $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$ to jej wektor pędu. **Relatywistyczny wzór na pęd** jest nieco inny niż ten, który znaleźliśmy do tej pory – zawiera dodatkowy czynnik:

$$\vec{p} = \gamma \cdot m\vec{v} = \vec{\beta}\gamma \cdot mc,$$

gdzie

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{1 - \beta^2}.$$

Relatywistyczna energia cząstki wyraża się wzorem

$$E = \gamma mc^2.$$

Jeśli cząstka znajduje się w spoczynku, jej energia w tym układzie jest równa mc^2 . Jest to tzw. **energia spoczynkowa**.

Długość czteropędu powinna być niezmiennikiem transformacji Lorentza (tak jak interwał czasoprzestrzenny jest niezmiennikiem w przypadku czteropłożenia). Dla zerowego pędu wynosi on $m^2 c^2$. W takim razie

$$\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 ,$$

skąd otrzymujemy **inny wzór na energię całkowitą**:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2} .$$

Łatwo sprawdzić, że dla zerowego pędu otrzymujemy energię spoczynkową, $E = mc^2$. W przypadku cząstek o zerowej masie dostajemy

$$E = pc .$$

Ponieważ $E = \gamma mc^2$, $p = \beta \gamma mc$, oznacza to, że dla cząstek bezmasowych czynnik β wynosi 1. **Cząstki bezmasowe muszą poruszać się z prędkością światła.**

Skądinąd wiemy, że **energia i pęd fotonu** wyrażają się następującymi wzorami:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} , \quad p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} ,$$

gdzie ν – częstotliwość fotonu, λ – długość fali, h – stała Plancka, $h \approx 6.63 \text{ J} \cdot \text{s}$.

13.4 Układ środka masy. Masa niezmiennicza układu

Układ środka masy danego zbioru cząstek to taki układ odniesienia, w którym **łączny pęd wszystkich cząstek wynosi 0**. Układ ten porusza się z prędkością

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{\vec{p}}{E} c^2 ,$$

względem laboratorium, gdzie $\vec{p}$ – łączny pęd cząstek w układzie laboratorium, E – łączna energia cząstek w układzie laboratorium⁹

Ponieważ łączne czteroprzyspieszenie cząstek jest czterowektorem (gdyż jest sumą czterowektorów), jego czterodługość jest niezmiennikiem transformacji Lorentza. Zwyczajowo oznacza się ją przez Mc :

$$Mc = \sqrt{E^2/c^2 - \vec{p}^2} .$$

Wielkość M (czyli masę odpowiadającą długości łącznego czteropędu) nazywa się **masą niezmienniczą** układu cząstek.

13.5 Relatywistyczny efekt Dopplera

Obserwator poruszający się względem źródła światła obserwuje inną długość fali świetlnej, niż ta, którą wysyła źródło. Zależność pomiędzy tymi długościami ma następującą postać:

$$\lambda' = \lambda \cdot \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} ,$$

gdzie v to prędkość **oddalania się** źródła od obserwatora (wyprowadzenie znajduje się w dodatku E). Wprowadza się też tzw. **przesunięcie ku czerwieni**, oznaczane przez z i zdefiniowane jako:

$$z = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 \xrightarrow{v \ll c} \frac{v}{c} .$$

Jeśli wartość z jest ujemna, mówimy o dodatnim **przesunięciu ku fioletowi**.

⁹Można to łatwo wyprowadzić, zakładając, że układ środka masy porusza się np. wzdłuż osi x z jakąś prędkością v . Przyprowadzając do zera łączny pęd cząstek po transformacji Lorentza otrzymuje się warunek na v .

A Przyspieszenie w układzie obracającym się

Układ U' obraca się względem układu U z prędkością kątową $\vec{\Omega}$. Początki układów pokrywają się.

Niech $\vec{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) oznacza i -ty wersor układu U' . Dla dowolnego wektora $\vec{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i$ oznaczmy

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^3 u_i \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^3 (\dot{u}_i \vec{e}_i + u_i \dot{\vec{e}}_i) \quad - \text{ pochodna po czasie w układzie } U,$$

$$\frac{d'\vec{u}}{dt} = \sum_{i=1}^3 \dot{u}_i \vec{e}_i \quad - \text{ pochodna po czasie w układzie } U'.$$

Dla obserwatora związanego z U' wersory $\vec{e}_i$ mają stałe kierunki, więc jako „pochodną” rozumie on wyłącznie zmianę współrzędnych w czasie. Obserwator w U zdaje sobie sprawę, że wersory $\vec{e}_i$ się obracają, więc obliczając pochodną bierze pod uwagę niezerowe pochodne wersorów.

Oznaczmy położenie ciała w U przez $\vec{r}$. Położenie w U' , pomimo wyrażenia go w innym układzie współrzędnych, będzie geometrycznie tym samym wektorem, prowadzącym od wspólnego początku U i U' (założyliśmy na początku, że początki układów pokrywają się) do danego ciała. Obserwator w U' inaczej natomiast określi prędkość i przyspieszenie ciała niż ten w U .

W układzie U :

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i, \quad \vec{v} = \frac{d}{dt} \vec{r} = \sum_{i=1}^3 (\dot{x}_i \vec{e}_i + x_i \dot{\vec{e}}_i), \quad \vec{a} = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \sum_{i=1}^3 (\ddot{x}_i \vec{e}_i + 2 \dot{x}_i \dot{\vec{e}}_i + x_i \ddot{\vec{e}}_i).$$

W układzie U' :

$$\vec{r}' = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i = \vec{r}, \quad \vec{v}' = \frac{d'}{dt} \vec{r}' = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \vec{e}_i, \quad \vec{a}' = \frac{d'^2}{dt^2} \vec{r}' = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \vec{e}_i.$$

Żeby odpowiedzieć na pytanie, jaki jest związek między $\vec{a}$ i $\vec{a}'$, musimy wiedzieć, jak zmieniają się w czasie wersory układu U' (z punktu widzenia obserwatora w U). Pochodna wersora $\vec{e}_i$ musi być doń prostopadła (vide rozdział 5). Musi też być zawarta w płaszczyźnie obrotu układu U' , zatem jest prostopadła również do $\vec{\Omega}$. Stąd

$$\dot{\vec{e}}_i \sim \vec{\Omega} \times \vec{e}_i.$$

Jaki będzie współczynnik proporcjonalności? Załóżmy, że wektor $\vec{\Omega}$ jest skierowany wzdłuż $\vec{e}_z$, wersor $\vec{e}_i$ tworzy z wektorem $\vec{\Omega}$ kąt θ , a z wersorem $\vec{e}_x$ – kąt φ . Mamy wtedy:

$$\vec{\Omega} \times \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \Omega \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

gdzie $\Omega = \dot{\varphi}$. Stąd $\dot{\vec{e}}_i = \Omega \times \vec{e}_i$, a zatem (podstawiając do wyprowadzonych wyżej wzorów) dostajemy:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \sum_{i=1}^3 [\dot{x}_i \vec{e}_i + x_i (\Omega \times \vec{e}_i)] = \\ &= \vec{v}' + \Omega \times \vec{r}' \\ \vec{a} &= \sum_{i=1}^3 (\ddot{x}_i \vec{e}_i + 2 \dot{x}_i \dot{\vec{e}}_i + x_i \ddot{\vec{e}}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \left[\ddot{x}_i \vec{e}_i + 2 \dot{x}_i (\Omega \times \vec{e}_i) + x_i \left(\dot{\Omega} \times (\Omega \times \vec{e}_i) \right) + x_i (\dot{\Omega} \times \vec{e}_i) \right] = \\ &= \vec{a}' + 2 \Omega \times \vec{v}' + \Omega \times (\Omega \times \vec{r}') + \dot{\Omega} \times \vec{r}'\end{aligned}$$

Przenosząc z prawej strony na lewą wszystkie wyrazy poza $\vec{a}'$, otrzymujemy:

$$\vec{a}' = \vec{a} + \underbrace{(-2 \Omega \times \vec{v}')}_{\vec{a}_{\text{Cor.}}} + \underbrace{(-\Omega \times (\Omega \times \vec{r}'))}_{\vec{a}_{\text{odśr.}}} + \underbrace{(-\dot{\Omega} \times \vec{r}')}_{\vec{a}_{\text{azym.}}}.$$

B Wyprowadzenie I i III prawa Keplera

I. [w budowie]

III. Półoś wielka orbity eliptycznej ma długość

$$a = \frac{r_A + r_P}{2} = \frac{GMm}{-2E},$$

zaś okres obiegu wynosi

$$T = \int_0^T dt = 2 \int_{r_P}^{r_A} \frac{dr}{\dot{r}},$$

gdzie

$$r_P = \frac{GMm}{-2E} \left(1 - \sqrt{1 - 2 \frac{-2EL^2}{G^2 M^2 m^3}} \right), \quad r_A = \frac{GMm}{-2E} \left(1 + \sqrt{1 - 2 \frac{-2EL^2}{G^2 M^2 m^3}} \right).$$

Żeby obliczyć T , musimy znać $\dot{r}$. Z zasad zachowania mamy

$$\begin{cases} \text{const} = E = \frac{m\dot{r}^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{m\dot{r}^2 + mr^2\omega^2}{2} - \frac{GMm}{r} \\ \text{const} = L = mr^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{mr^2} \end{cases}$$

zatem, po wstawieniu do pierwszego równania ω z drugiego i przemnożeniu obu stron przez $2mr^2$:

$$\begin{aligned} 2Emr^2 &= m^2 r^2 \dot{r}^2 + L^2 - 2GMm^2 r \\ \Rightarrow \dot{r} &= \frac{1}{mr} \sqrt{2Emr^2 + 2GMm^2 r - L^2} \\ \Rightarrow T &= 2 \int_{r_P}^{r_A} \frac{mr}{\sqrt{2Emr^2 + 2GMm^2 r - L^2}} dr \end{aligned}$$

Wyprowadźmy wzór na całkę:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{-ax^2 + bx - c}} &= -\frac{1}{2\sqrt{a}} \int \frac{-2x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a}}{\sqrt{-x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}} dx = \\ &= \underbrace{-\frac{1}{2\sqrt{a}} \int \frac{-2x + \frac{b}{a}}{\sqrt{-x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}} dx}_A + \underbrace{\frac{b}{2a^{3/2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}}}_B \end{aligned}$$

Wartość A można obliczyć natychmiast:

$$A = -\frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{-x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}.$$

Nad B trzeba troszkę popracować:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{b}{2a^{3/2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}} = \\
 &= \frac{b}{2a^{3/2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-(x - \frac{b}{2a})^2 + (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a})}} = \\
 &= \frac{b}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b^2 - 4ac}} \int \frac{dx}{\sqrt{-\left(\frac{2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right)^2 + 1}} = // \left\{ \begin{array}{l} \frac{2ax-b}{\sqrt{b^2-4ac}} = \sin \alpha \\ dx = \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cos \alpha d\alpha \end{array} \right. // = \\
 &= \frac{b}{2a^{3/2}} \int \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} d\alpha = \\
 &= \frac{b}{2a^{3/2}} \cdot \alpha = \\
 &= \frac{b}{2a^{3/2}} \cdot \arcsin \left[\frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right].
 \end{aligned}$$

Dostajemy:

$$\int \frac{x}{\sqrt{-ax^2 + bx - c}} = A + B = -\frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{-x^2 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a^{3/2}} \cdot \arcsin \left[\frac{2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right].$$

Wstawmy ten paskudny wynik do równania na okres;

$$\begin{aligned}
 T &= 2m \left[-\frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt{-r^2 + \frac{b}{a}r - \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a^{3/2}} \cdot \arcsin \left[\frac{2ar - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right] \right] \bigg|_{r_P}^{r_A}, \\
 r_P &= \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad r_A = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \\
 a &= -2Em, \quad b = 2GMm^2, \quad c = L^2.
 \end{aligned}$$

Szczęśliwie, pierwszy wyraz zeruje się w $r = r_A, r_P$, a drugi przyjmuje przyjemną postać:

$$T = \frac{mb}{a^{3/2}} (\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \pi \frac{mb}{a^{3/2}} = 2\pi \frac{GMm^3}{(-2Em)^{3/2}}.$$

Stosunek w trzecim prawie Keplera jest równy:

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{G^2 M^2 m^6 / (-2Em)^3}{G^3 M^3 m^3 / (-2E)^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

C Wyprowadzenie transformacji Lorentza

Chcemy uzyskać wzór na transformację współrzędnej czasowej i przestrzennej z układu U do układu U' , poruszającego się względem U ze stałą prędkością v . **Żądamy, żeby transformacja nie wyróżniała żadnego punktu w czasoprzestrzeni.** Jedyną transformacją o tej własności jest transformacja liniowa:

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t'_0 \\ x'_0 \end{pmatrix}.$$

Wartości t'_0 i x'_0 zależą od tego, w jakim momencie w układzie U' zaczniemy mierzyć czas i gdzie wtedy znajduje się początek U' względem początku U . Bez straty ogólności przyjmijmy, że w obu układach czas mierzymy od momentu, w którym początki układów pokrywają się. W takim razie

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t'_0 \\ x'_0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad t'_0 = 0, \quad x'_0 = 0.$$

Jeśli ciało w układzie U zacznie w chwili $t = 0$ poruszać się z prędkością v , to jego położenie pokrywa się z położeniem początku układu U' , a zatem w układzie U' powinno stałe wynosić $x' = 0$:

$$\begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ vt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_v t + B_v vt \\ C_v t + D_v vt \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C_v = -v D_v.$$

Jeśli ciało pozostaje w początku układu U , to w układzie U' powinno poruszać się z prędkością $-v$, co wynika z **zasady względności** – ruch U' względem U to to samo, co ruch U względem U' :

$$\begin{pmatrix} t' \\ -vt' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_v t \\ C_v t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_v = -\frac{1}{v} C_v = D_v.$$

Jak dotychczas, wszelkie wymagane przez nas warunki spełnia znana nam ze szkoły transformacja Galileusza: $t' = t$, $x' = x - vt$ (wtedy $A_v = D_v = 1$, $B_v = 0$, $C_v = -v$). Warunkiem, który odróżnia transformację Lorentza od transformacji Galileusza jest fakt doświadczalny: **wartość prędkości światła w próżni we wszystkich układach inercjalnych jest taka sama i wynosi $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.** Wynika z niego, że promień świetlny poruszający się w U z prędkością c powinien mieć prędkość c również w U' :

$$\begin{pmatrix} t' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_v & B_v \\ C_v & D_v \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ ct \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_v + cB_v) \cdot t \\ (C_v + cD_v) \cdot t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_v = \frac{C_v + cD_v - cA_v}{c^2} = -\frac{v}{c^2} D_v.$$

Podsumowując dotychczasowe rozważania, mamy

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = D_v \begin{bmatrix} 1 & -\frac{v}{c^2} \\ -v & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix},$$

a w nieco bardziej eleganckiej formie

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = D_v \begin{bmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.$$

Jak wyznaczyć funkcję D_v ? Zauważmy, że jednoczesna zmiana znaku przy x , x' i v odpowiada zmianie zwrotu osi x i x' . Zmieniając zwrot osi, zmieniamy wyłącznie nasz umowny opis sytuacji fizycznej (liczba, którą przyporządkowujemy położeniu danego obiektu, zmienia się np. z 3.2 na -3.2), a nie samą sytuację (obiekt nie zmienia swojego „fizycznego” położenia względem jakiegokolwiek innego obiektu), więc po takiej operacji powyższe równanie powinno wciąż być spełnione – czyli:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ -x' \end{pmatrix} = D_{-v} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ -x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = D_{-v} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ -x \end{pmatrix} = D_{-v} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \\ \Rightarrow D_{-v} = D_v .$$

Składając transformację odpowiadającą prędkości v z transformacją odpowiadającą prędkości $-v$ powinniśmy uzyskać transformację z U do U' i z powrotem do U – czyli identyczność. Mamy więc

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = D_{-v} \begin{bmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{bmatrix} \cdot D_v \begin{bmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \\ = D_v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow D_v = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Możemy zapisać już ostateczną postać jednowymiarowej transformacji Lorentza:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} ,$$

gdzie

$$\beta = \frac{v}{c} , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

Jak zachowują się współrzędne poprzeczne? Gdyby wartość położenia na osi y (to samo dotyczy osi z) zmieniała się przy przejściu z U do U' np. na większą, to powinna się również zwiększać przy przejściu z powrotem z U' do U – w końcu nie powinno mieć znaczenia dla osi y , jaki jest zwrot osi x , a zatem jaki jest zwrot prędkości względnej układów (mogłoby mieć znaczenie co najwyżej to, czy układy się oddalają, czy zbliżają – ale tę kwestię oba układy „widzą” tak samo). W takim razie wartość położenia w U musiałaby być większa od niej samej, co jest wewnętrznie sprzeczne. Wyciągamy stąd wniosek, że wartości współrzędnych poprzecznych do kierunku ruchu względnego układów transformują się trywialnie (nie zmieniają się). W związku z tym pełna postać transformacji Lorentza dla trzech wymiarów przestrzennych to

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} ,$$

gdzie

$$\beta = \frac{v}{c} , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} .$$

D Relatywistyczny pęd i energia spoczynkowa – uzasadnienie

Jaką zerową współrzędną powinniśmy dobrać do wektora pędu, żeby dostać czterowektor? Powiedzmy, że dla cząstki poruszającej się w układzie U z prędkością v wynosi ona a_v . Jeśli cząstka spoczywa w układzie U , to jej pęd w tym układzie powinien być zerowy, natomiast będzie miał wartość p w układzie U' , poruszającym się z prędkością $-v$. Mamy więc:

$$\begin{pmatrix} a_v \\ p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \cdot a_0 \\ \beta\gamma \cdot a_0 \end{pmatrix}.$$

Chcielibyśmy, żeby w granicy $\beta \ll 1$ wyrażenie na pęd redukowało się do $p = mv$ znanego nam z mechaniki klasycznej:

$$p = \beta\gamma \cdot a_0 \xrightarrow{\beta \ll 1} \frac{v}{c} a_0 \Rightarrow a_0 = mc.$$

Mamy więc

$$a_v = \gamma mc, \quad p = \beta\gamma mc = \gamma mv.$$

Jaka będzie nierelatywistyczna granica funkcji a_v ?

$$a_v = \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}} \xrightarrow{\beta \ll 1} mc \cdot \left(1 + \frac{\beta^2}{2}\right) = mc + \frac{mv^2}{2c} = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{mv^2}{2}\right).$$

Drugi człon w nawiasie wygląda jak nierelatywistyczny wzór na energię kinetyczną – czyżby zatem a_v odpowiadało podzielonej przez prędkość światła energii cząstki? To sugeruje, że wyrażenie mc^2 można potraktować jako pewną składową całkowitej energii cząstki, wynikająca wyłącznie z faktu posiadania przez cząstkę masy. Jest to **energia spoczynkowa** cząstki. Funkcję a_v identyfikujemy z ilorazem E/c . Czeropęd $(E/c, p_x, p_y, p_z)$ jest więc czterowektorem:

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

E Relatywistyczny efekt Dopplera – wyprowadzenie

Niech źródło emitujące monochromatyczną falę świetlną oddala się od obserwatora z prędkością v . Określmy następujące zdarzenia:

A_1 – pewien grzbiet fali świetlnej opuszcza źródło ,

A_2 – kolejny grzbiet fali świetlnej opuszcza źródło ,

B_1 – pierwszy grzbiet dociera do obserwatora ,

B_2 – drugi grzbiet dociera do obserwatora .

Założmy, że czas w obu układach mierzymy od momentu wysłania przez źródło pierwszego grzbietu. W układzie źródła położenie mierzymy względem źródła, a w układzie obserwatora – względem obserwatora. Założmy, że w chwili $t = t' = 0$ źródło znajdowało się tuż przy obserwatorze (czyli $x(t=0) = x'(t'=0) = 0$).

W układzie źródła zdarzeniom A_1 i A_2 odpowiadają współrzędne:

$$A_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \rightarrow \begin{pmatrix} cT \\ 0 \end{pmatrix},$$

gdzie T to okres fali świetlnej w układzie źródła. W układzie obserwatora:

$$A_1 \rightarrow \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 \rightarrow \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{bmatrix} \begin{pmatrix} cT \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma cT \\ \beta\gamma cT \end{pmatrix}.$$

W układzie obserwatora zdarzenia B_1 i B_2 mają położenie równe 0, zaś czas pomiędzy zdarzeniem A_i a B_i ($i = 1, 2$) to czas, w ciągu którego wyemitowane światło dotrze od źródła do obserwatora:

$$B_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma cT \\ \beta\gamma cT \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta\gamma cT \\ -\gamma cT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\beta)\gamma cT \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Różnica współrzędnych czasowych pomiędzy B_2 i B_1 podzielona przez prędkość światła to okres fali w układzie obserwatora:

$$\begin{aligned} T' &= \frac{(1+\beta)\gamma cT}{c} = \\ &= (1+\beta)\gamma T = \\ &= \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} T = \\ &= T \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}. \end{aligned}$$

Ponieważ $T = \frac{\lambda}{c}$, zależność pomiędzy długością fali obserwowanej a długością fali emitowanej będzie miała analogiczną postać:

$$\lambda' = \lambda \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$