Tensory i ich transformacje

mklis@fuw.edu.pl

21 lutego 2012

1 Składowe tensora

Rozważmy wektor $\boldsymbol{a}$ i tensor $\boldsymbol{T}$, który transformuje wektor $\boldsymbol{a}$ w wektor $\boldsymbol{b}$, tzn.

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}. \tag{1}$$

W kartezjańskiej bazie $\mathbb{R}^3$ $\boldsymbol{a}$ ma rozkład

$$\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3, \tag{2}$$

podobnie $\boldsymbol{b}$. Chcemy znaleźć składowe tensora $\boldsymbol{T}$. Mamy

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a} = a_1\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_3. \tag{3}$$

Stąd, mnożąc przez odpowiednie wersory, dostajemy składowe $\boldsymbol{b}$

$$b_1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{b} = a_1\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_3, \tag{4}$$
$$b_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{b} = a_1\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_3, \tag{5}$$
$$b_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{b} = a_1\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_3. \tag{6}$$

Nazywamy poszczególne iloczyny elementami macierzowymi T_{ij} tensora $\boldsymbol{T}$ i zapisujemy powyższe jako

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

czyli równanie w postaci macierzowej ma postać

$$[\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{T}][\boldsymbol{a}]. \tag{8}$$

W notacji indeksowej powyższe zapisujemy jako

$$b_i = T_{ij}a_j. \tag{9}$$

Uwaga: przyjmujemy tutaj **konwencję**, w myśl której tensor $\boldsymbol{T}$ działa na wersory bazy kartezjańskiej następująco

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i = T_{ji}\boldsymbol{e}_j, \tag{10}$$

czyli $\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1 = T_{11}\boldsymbol{e}_1 + T_{21}\boldsymbol{e}_2 + T_{31}\boldsymbol{e}_3$, etc. Przyjmujemy taką konwencję, ponieważ wówczas możemy zapisać m-tą składową wektora $\boldsymbol{b}$ jako

$$b_m = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{e}_m = a_iT_{ji}\boldsymbol{e}_j \cdot \boldsymbol{e}_m = a_iT_{ji}\delta_{jm} = T_{mi}a_i, \tag{11}$$

co odpowiada równaniu macierzowemu (8). Gdybyśmy umówili się inaczej, tzn.

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i = T_{ij}\boldsymbol{e}_j, \tag{12}$$

wtedy równanie macierzowe, które byśmy dostali (o czym łatwo się przekonać), miałoby postać

$$[\boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{T}]^{\mathsf{T}}[\boldsymbol{a}]. \tag{13}$$

Odpowiadałoby ono tensorowemu równaniu $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{a}$, co jest mało naturalne.

2 Transformacje ortogonalne

Zdefiniowaliśmy na ćwiczeniach transformację ortogonalną jako taką, która nie zmienia długości i kątów pomiędzy wektorami. Pokazaliśmy, że tensor $\boldsymbol{Q}$ odpowiadający takiej transformacji, ma następującą własność

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{Q} = \mathbf{1}. \tag{14}$$

Wynika z tego, że wyznacznik macierzy, odpowiadającej transformacji ortogonalnej, jest równy

$$\det\boldsymbol{Q} = \pm 1, \tag{15}$$

Wspomnieliśmy też, że dowolne dwa układy współrzędnych kartezjańskich $\{\boldsymbol{e}'\}$ i $\{\boldsymbol{e}\}$ możemy ze sobą związać transformacją ortogonalną $\boldsymbol{Q}$ taką, że

$$\boldsymbol{e}_i' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_i, \tag{16}$$

czyli zgodnie z naszą konwencją

$$\boldsymbol{e}_i' = Q_{ji}\boldsymbol{e}_j. \tag{17}$$

Łatwo sprawdzić, że składowe macierzy $[\boldsymbol{Q}]$ są dane przez

$$Q_{mn} = \cos(\boldsymbol{e}_m,\ \boldsymbol{e}_n'), \tag{18}$$

a więc są cosinusami kątów pomiędzy odpowiednimi wersorami 'starej' i 'nowej' bazy. Macierz tych cosinusów kierunkowych nazywamy macierzą transformacji z układu nieprimowanego do primowanego. Łatwo sprawdzić, że jeśli potrafimy wyrazić wersory nowej bazy $\boldsymbol{e}_i'$ poprzez wersory starej bazy $\boldsymbol{e}_i$, to możemy od razu podać postać macierzy $\boldsymbol{Q}$, której kolumnami będą po prostu nowe wersory (wyrażone przez stare)

$$\boldsymbol{Q} = \left(\begin{array}{c|c|c} \boldsymbol{e}_1' & \boldsymbol{e}_2' & \boldsymbol{e}_3' \end{array} \right). \tag{19}$$

3 Definicja tensorów poprzez własności transformacyjne

Transformacja składowych kartezjańskich wektora Rozważmy na początek transformację składowych kartezjańskich wektora $\boldsymbol{a}$ pomiędzy dwiema bazami $\{\boldsymbol{e}\}$ i $\{\boldsymbol{e}'\}$. Wektor ten ma w obu bazach rozkład na składowe

$$\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i = a_j\boldsymbol{e}_j'. \tag{20}$$

Wiemy już, zgodnie z naszą konwencją, jak transformują się wersory bazowe:

$$\boldsymbol{e}_i' = Q_{mi}\boldsymbol{e}_m, \tag{21}$$

a zatem

$$a_i' = \boldsymbol{a} \cdot Q_{mi}\boldsymbol{e}_m = Q_{mi}a_m. \tag{22}$$

W notacji macierzowej odpowiada to równaniu

$$[\boldsymbol{a}]' = [\boldsymbol{Q}]^{\mathsf{T}}[\boldsymbol{a}]. \tag{23}$$

Uwaga: Musimy tutaj odróżnić dwa obiekty - powyższe równanie dotyczy *tego samego* wektora, ale reprezentowanego w innej bazie. *Nie jest* ono równoważne równaniu $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{a}$, w którym $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{a}'$ są różnymi wektorami, powiązanymi działaniem tensora $\boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}$.

Transformacja składowych kartezjańskich tensora Podobnie można pokazać, że składowe katrezjańskie tensora $\boldsymbol{T}$ w dwóch bazach można powiązać następującą transformacją

$$T'_{ij} = \boldsymbol{e}'_i \cdot \boldsymbol{T}\boldsymbol{e}'_j = Q_{mi}\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{T}Q_{nj}\boldsymbol{e}_n = Q_{mi}Q_{nj}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_n = Q_{mi}Q_{nj}T_{mn}, \tag{24}$$

która zapisana macierzowo ma postać

$$[\boldsymbol{T}]' = [\boldsymbol{Q}]^{\mathsf{T}}[T][\boldsymbol{Q}]. \tag{25}$$

Oczywiście poprzednia **Uwaga** pozostaje w mocy, więc zapis ten *nie jest* równoważny zapisowi $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{Q}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}$, który wiąże dwa tensory $\boldsymbol{T}$ i $\boldsymbol{T}'$, a nie składowe tego samego tensora w różnych bazach.

Własności transformacyjne i charakter tensorowy Z powyższych rozważań wynika, że do scharakteryzowania wektora czy tensora wystarczy znać jego składowe w pewnej bazie, ponieważ wiemy, jak transformować je do dowolnej innej bazy. Możemy ogólnie sklasyfikować rozważane obiekty ze względu na to, jak transformują się one przy zmianie bazy. Rozważmy ponownie dwie bazy $\{\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \boldsymbol{e}'_3\}$ oraz $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ i wiążącą je transformację ortogonalną $\boldsymbol{e}'_i = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_i$.

Definiujemy więc składowe kartezjańskie tensorów:

$\alpha' = \alpha$	skalar (tensor rzędu 0)
$a'_i = Q_{mi}a_m$	wektor (tensor rzędu 1)
$T'_{ij} = Q_{mi}Q_{nj}T_{mm}$	tensor (tensor rzędu 2)
$D'_{ijk} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{pk}D_{mnp}$	tensor rzędu 3
$C'_{ijkl} = Q_{mi}Q_{nj}Q_{pk}Q_{ql}C_{mnpq}$	tensor rzędu 4