Pracownia fizyczna i elektroniczna

Wykład 1:
Obwody prądu stałego i zmiennego

Kontakt: mkuich@fuw.edu.pl

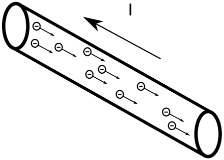
Materiały: Pracownia fizyczna i elektroniczna (1100-2F23,1100-2BF21)

- kurs na platformie Kampus

Przypomnienie podstawowych pojęć i praw 1

- **Napięcie elektryczne** (U) - spadek potencjału na części obwodu elektrycznego nie zawierającej źródeł prądu
- **Siła elektromotoryczna** (E) - napięcie na odcinku obwodu zawierającego źródło prądu, a nie zawierającego rezystancji
- **Prąd elektryczny** - uporządkowany ruch ładunków elektrycznych
- **Natężenie prądu** (I) - ilość ładunku dQ przepływająca przez przewodnik w jednostce czasu dt:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

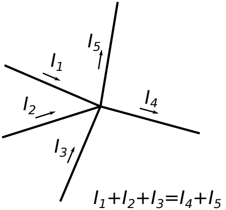


Przypomnienie podstawowych pojęć i praw 2

- **Prawo Ohma**: $U = R \cdot I$
- **Opór / rezystancja** (R) - współczynnik proporcjonalności między napięciem i natężeniem
- **Pierwsze prawo Kirchhoffa**:

$$\sum_i I_i = 0$$

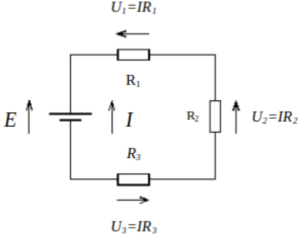
dla dowolnego wezła sieci elektrycznej



- **Drugie prawo Kirchhoffa**:

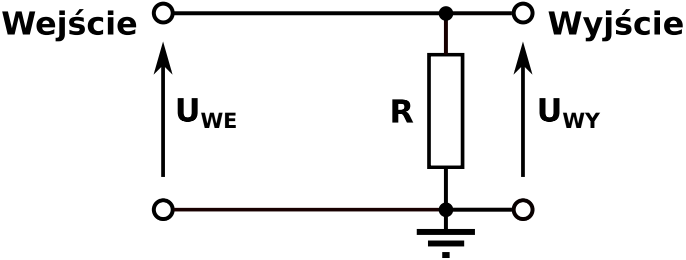
$$\sum_i IR_i = E$$

dla obwodu zamkniętego



Wejście i wyjście układu

- Parametrami prawie każdego układu elektronicznego są:
  - $\rightarrow$ rodzaj sygnału doprowadzonego do *wejścia* (zwykle napięcie, U_{WE})
  - $\rightarrow$ rodzaj sygnału otrzymanego na *wyjściu* (zwykle napięcie, U_{WY})

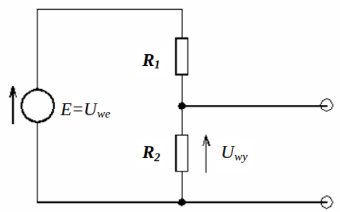


- Stosunek napięcia na *wyjściu* układu do (ustalonej) wartości na jego *wejściu* nazywamy **transmitancją**:

$$T = \frac{U_{WY}}{U_{WE}}$$

Dzielnik napięcia, dzielnik prądowy

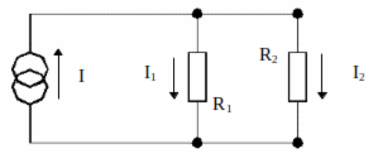
- **Dzielnik napięcia** - układ pozwalający otrzymać określone napięcie na wyjściu układu



$$U_{WY} = U_{WE}\frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

→ Działanie większości obwodów elektrycznych można opisać jako układ jednego lub kilku dzielników napięcia

- **Dzielnik prądowy** - układ pozwalający otrzymać określony prąd w odpowiednich gałęziach układu; wygodnie go rozpatrywać w funkcji **przewodności** gałęzi układu (**G**)

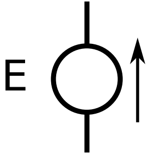


$$I_1 = I\frac{G_1}{G_1 + G_2} \qquad I_2 = I\frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

$$G_1 = \frac{1}{R_1} \qquad G_2 = \frac{1}{R_2}$$

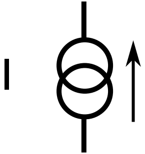
Idealne i rzeczywiste źródła energii elektrycznej

Źródło napięciowe



Napięcie E na zaciskach nie zależy od natężenia prądu wyjściowego

Źródło prądowe



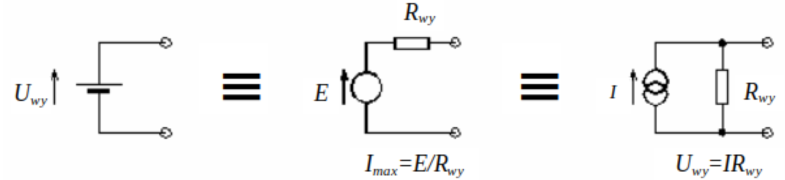
Prąd wyjściowy I nie zależy od napięcia na zaciskach

Każde <u>rzeczywiste</u> źródło energii elektrycznej może być przedstawione jako:

$\rightarrow$ źródło napięciowe i szeregowa rezystancja wewnętrzna

lub

$\rightarrow$ źródło prądowe i bocznikująca je rezystancja wewnętrzna

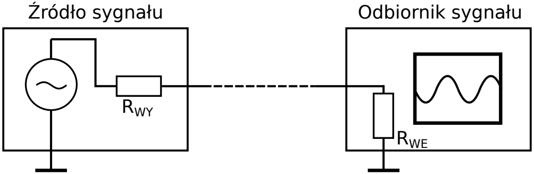


Zasada Thevenina:
Każdą sieć elektryczną można przedstawić w postaci obwodu zastępczego składającego się ze źródła napięciowego i szeregowej rezystancji wewnętrznej

Zasada Nortona:
Każdą sieć elektryczną można przedstawić w postaci obwodu zastępczego składającego się ze źródła prądowego zbocznikowanego rezystancją wewnętrzną

Rezystancja (impedancja) wewnętrzna urządzeń

- W układach elektronicznych wyjście jednego układu zawsze łączy się z wejściem innego układu



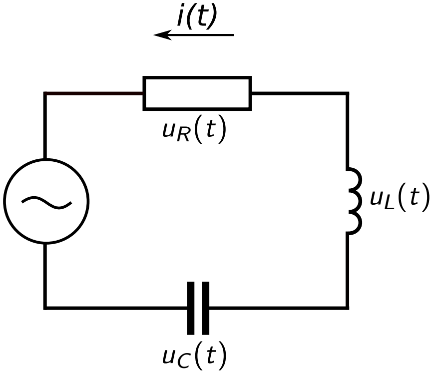
- Każdy układ, zgodnie z zasadą Thevenina, można sprowadzić do źródła/odbiornika obarczonego impedancją wyjściową/wejściową
- Taki układ tworzy dzielnik napięcia i efektywnie może prowadzić do zmniejszenia amplitudy sygnału widzianego przez odbiornik
- Minimalizujemy ten efekt gdy: $R_{WE} >> R_{WY}$
- Wyjątki:
  - $\rightarrow$ układy dużej częstotliwości ($\sim$GHz)
  - $\rightarrow$ linie transmisyjne
  - $\rightarrow$ badamy sygnał prądowy (nie napięciowy)

Napięcie i natężenie prądu zmiennego

- Natężenie prądu: $I = \frac{dQ}{dt} \rightarrow i(t)$
- Napięcie w zamkniętym obwodzie elektrycznym, $u(t)$, jest funkcją natężenia prądu $i(t)$
- Pierwsze prawo Kirchhoffa $\rightarrow$ każdym punkcie obwodu szeregowego natężenie prądu ma jednakową wartość
- Drugie prawo Kirchhoffa:

  $E = \sum_i U_i$

  $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$



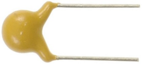
Układy złożone z elementów biernych

Elementy bierne

opór (R)

indukcyjność (L)

pojemność (C)

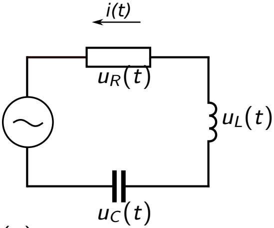


Uogólnienie prawa Ohma dla prądów zmiennych:

opór R: $u_R(t) = Ri(t)$

indukcyjność L: $u_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}$

pojemność C: $u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)$



Równanie ruchu ładunku elektrycznego

$$\left\{ u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \int \frac{i(t)}{C} \right.$$

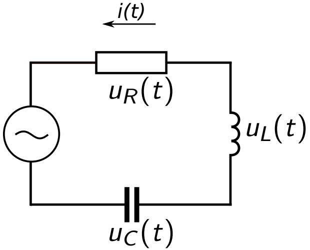
Obwody prądu zmiennego - podejście zespolone

- Napięcie i natężenie prądu zależne od czasu i częstości kołowej:

$$u(\omega, t) = U_0 e^{j\omega t} \qquad i(\omega, t) = I_0 e^{j\omega t} \qquad \begin{aligned} j &= \sqrt{-1} \\ \omega &= 2\pi\nu \end{aligned}$$

U_0 - zespolona amplituda napięcia $\quad I_0$ - zespolona amplituda natężenia

$E(t) = Re[u(t)] \leftarrow$ rzeczywista wartość napięcia



- Impedancja (Z) - wielkość zespolona charakteryzująca zależność między natężeniem prądu i napięciem w obwodach prądu zmiennego

$$\frac{u(\omega,t)}{i(\omega,t)} = \frac{U_0}{I_0} = Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$$

opór: $\quad Z_R = R$

indukcyjność: $\quad Z_L(t) = j\omega L$

pojemność: $\quad Z_C(t) = \frac{1}{j\omega C}$

Więcej o impedancji

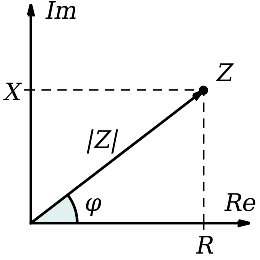
$$Z(\omega) = \frac{u(\omega, t)}{i(\omega, t)} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{I_0 e^{j\omega t - \varphi}} = \frac{U_0}{I_1 e^{j\varphi}} = \frac{U_0}{I_1} e^{-j\varphi} = |Z| e^{-j\varphi} = R + jX$$

$Re(Z) = R \leftarrow$ **Rezystancja** (opór czynny)

$Im(Z) = X \leftarrow$ **Reaktancja** (opór bierny)

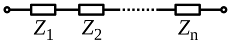
$\varphi \leftarrow$ przesunięcie fazowe między napięciem i natężeniem prądu

$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \leftarrow$ moduł impedancji (tzw. zawada)



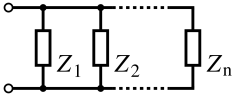
Szeregowe łączenie impedancji:

$$Z = \sum_i Z_i$$

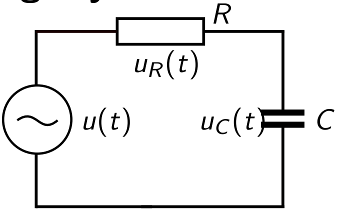


Równoległe łączenie impedancji:

$$\frac{1}{Z} = \sum_i \frac{1}{Z_i}$$



Szeregowy obwód RC



$\leftarrow$ Źródło napięciowe $u(t)$ o zmiennej sile elektromotorycznej:

$u(t) = u_R(t) + u_C(t)$

$\leftarrow$ Prąd płynący w obwodzie:

$i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$

$\uparrow$ Równanie ruchu ładunku elektrycznego: $u(t) = Ri(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt$

Podstawmy prąd do równania ruchu: $u(t) = u_R(t) + \frac{1}{RC}\int u_R(t)dt$

Napięcie na oporniku:

$u_R(t) = u(t) - u_C(t)$

$$u_R = RC\frac{d\left[u(t) - u_R(t)\right]}{dt}$$

$\leftarrow$ **Napięcie na oporze jest zróżniczkowanym napięciem na kondensatorze**

dla $u_R(t) << u(t) \;\rightarrow\; u_R \approx RC\frac{d}{dt}u(t)$

Napięcie na kondensatorze:

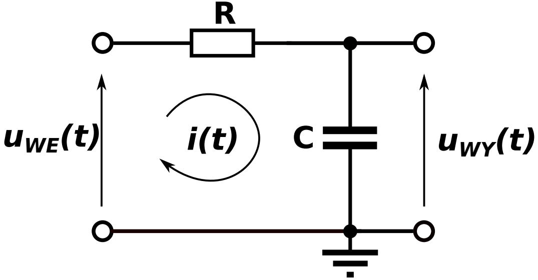
$u_C(t) = u(t) - u_R(t)$

$$u_C = \frac{1}{RC}\int\left[u(t) - u_C(t)\right]dt$$

$\leftarrow$ **Napięcie na kondensatorze jest scałkowanym napięciem na oporniku**

dla $u_C(t) << u(t) \;\rightarrow\; u_C \approx \frac{1}{RC}\int u(t)dt$

Obwód całkujący - filtr dolno-przepustowy



Napięcie wyjściowe:

$$u_{WY}(t) = u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)$$

Prąd płynący w obwodzie:

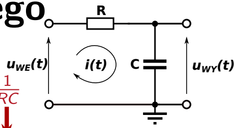
$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R} = \frac{u_{WE}(t) - u_{WY}(t)}{R}$$

$$u_{WY}(t) = \frac{1}{RC}\int \left[u_{WE}(t) - u_{WY}(t)\right] dt$$

gdy $u_{WY} << u_{WE}$:

$$u_{WY}(t) = \frac{1}{RC}\int u_{WE}(t) dt$$

Charakterystyka filtru dolno-przepustowego



Dla sygnału harmonicznego: $u_{WE}(t) = U_{WE}\, e^{j\omega t}$

Filtr RC można sprowadzić do **dzielnika napięcia**, wtedy sygnał wyjściowy:

$$u_{WY}(t) = \frac{u_{WE}(t) Z_C}{Z}$$

Stosunek napięć: $\dfrac{u_{WY}(t)}{u_{WE}(t)} = \dfrac{1/(j\omega C)}{R+1/(j\omega C)}$

Transmitancja:

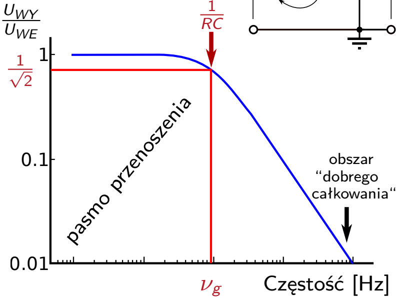
$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}$$

Przesunięcie fazowe między $u_{WY}(t)$ a $u_{WE}(t)$:

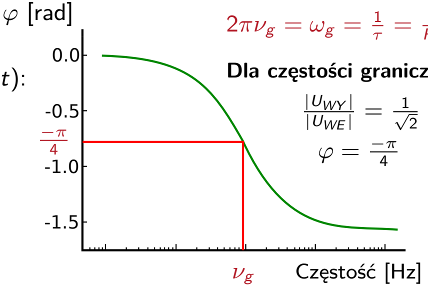
$\varphi = \arctan(-\omega RC)$ $\qquad$ $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{Im[Z_C/Z]}{Re[Z_C/Z]}$

Pasmo transmisji (przenoszenia) filtra dolnoprzepustowego w skali częstości:

od 0 do ν_g



$$2\pi\nu_g = \omega_g = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

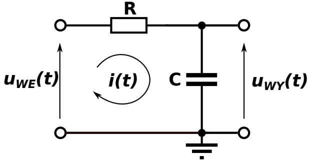


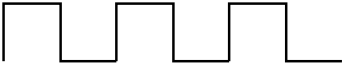
Dla częstości granicznej:

$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \frac{-\pi}{4}$$

Efekt całkowania sygnału

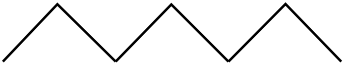




$u_{WE}(t)$

$\propto 1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right)$

$$u_{WY}(t) = \frac{1}{RC}\int[u_{WE}(t) - u_{WY}(t)]dt$$



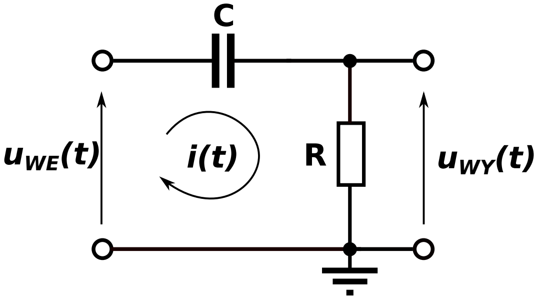
dla $U_{WY} << U_{WE}$

$$u_{WY}(t) \approx \frac{1}{RC}\int u_{WE}(t)dt$$

Zastosowanie filtra dolno-przepustowego:

- filtracja sygnałów (np. eliminacja zakłóceń)
- kształtowanie sygnałów

Obwód różniczkujący - filtr górno-przepustowy



Napięcie wyjściowe:

$$u_{WY}(t) = u_R(t) = Ri(t)$$

Prąd płynący w obwodzie:

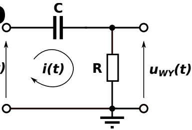
$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{d}{dt}(u_{WE}(t) - u_{WY}(t))$$

$$u_{WY}(t) = RC\frac{d}{dt}\left[u_{WE}(t) - u_{WY}(t)\right]$$

gdy $u_{WY} << u_{WE}$:

$$u_{WY}(t) = RC\frac{d}{dt}u_{WE}(t)$$

Charakterystyka filtru górno-przepustowego



Dla sygnału harmonicznego: $u_{WE}(t) = U_{WE}\, e^{j\omega t}$

Filtr RC można sprowadzić do **dzielnika napięcia**, wtedy sygnał wyjściowy:

$$u_{WY}(t) = \frac{u_{WE}(t)R}{Z}$$

Stosunek napięć: $\dfrac{u_{WY}(t)}{u_{WE}(t)} = \dfrac{R}{R+1/(j\omega C)}$

Transmitancja:

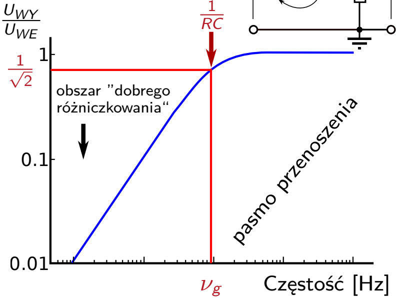
$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{\omega RC}{\sqrt{\omega^2 R^2 C^2 + 1}}$$

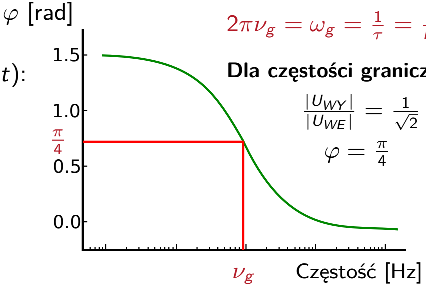
Przesunięcie fazowe między $u_{WY}(t)$ a $u_{WE}(t)$:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{Im[R/Z]}{Re[R/Z]}$$

Pasmo transmisji (przenoszenia) filtra dolnoprzepustowego w skali częstości:

od ν_g do ∞





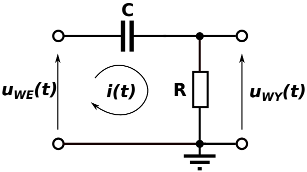
$$2\pi\nu_g = \omega_g = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

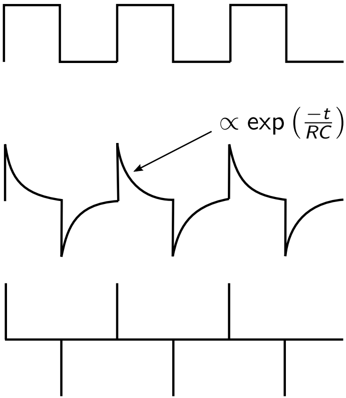
Dla częstości granicznej:

$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

Efekt różniczkowania sygnału





$u_{WE}(t)$

$$u_{WY}(t) = RC\frac{d}{dt}[u_{WE}(t) - u_{WY}(t)]$$

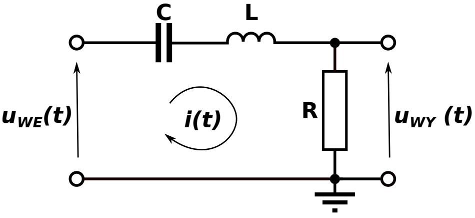
dla $U_{WY} << U_{WE}$

$$u_{WY}(t) \approx \frac{d}{dt}u_{WE}(t)$$

Zastosowanie filtra dolno-przepustowego:

- filtracja sygnałów (np. eliminacja składowej stałej)
- kształtowanie sygnałów
- szybkie wykrywanie zboczy sygnałów

Obwód rezonansowy szeregowy



Napięcie wejściowe:

$$u_{WE}(t) = u_C(t) + u_L(t) + u_R(t)$$

Równanie ruchu ładunku elektrycznego

$$u_{WE}(t) = \frac{q}{C} + L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt}$$

Ustalamy źródło energii elektrycznej: $u_{WE}(t) = U_0 e^{j\omega t}$

$\rightarrow$ sygnał harmoniczny o częstości kołowej ω i amplitudzie U_0

$\rightarrow$ zmienna siła elektromotoryczna $E(t) = Re[u_{WE}(t)]$

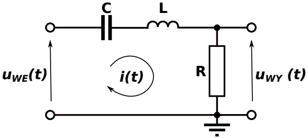
$\rightarrow$ prąd płynący w obwodzie: $i(t) = I_0 e^{j\omega t}$

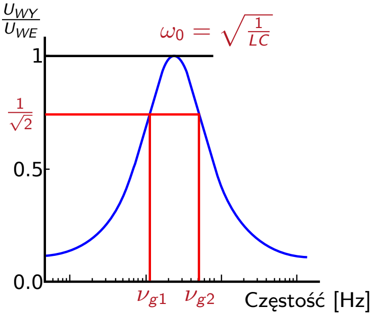
Impedancja układu: $\frac{U_0}{I_0} = Z = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R$

Układ rozważany jako dzielnik napięcia:

$$u_C(t) = \frac{1/(j\omega C)\ u_{WE}(t)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} \quad u_L(t) = \frac{j\omega L\ u_{WE}(t)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)} \quad u_R(t) = \frac{R\ u_{WE}(t)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)}$$

Charakterystyka filtru rezonansowego szeregowego





Dla sygnału harmonicznego: $u_{WE}(t) = U_{WE}e^{j\omega t}$

Napięcie wyjściowe:

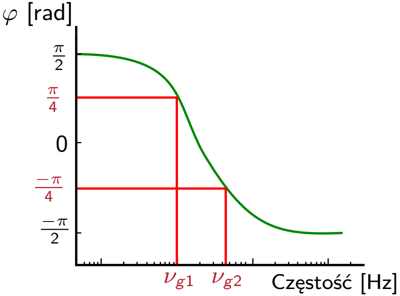
$$u_{WY}(t) = \frac{u_{WE}(t)R}{Z} = \frac{R\ u_{WE}(t)}{R + j\omega L + 1/(j\omega C)}$$

Transmitancja:

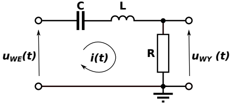
$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{R}{|Z|} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Przesunięcie fazowe między $u_{WY}(t)$ a $u_{WE}(t)$:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{1-\omega^2 LC}{\omega RC}\right) \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{Im[R/Z]}{Re[R/Z]}$$



Częstotliwość rezonansowa obwodu RLC



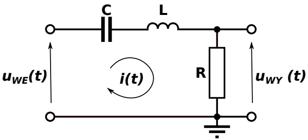
Napięciowe źródło sygnału harmonicznego:

$$u_{WE}(t) = U_0 e^{j\omega t}$$

Dla częstości rezonansowej: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ ➔ $Im(Z) = 0$

- → **amplituda napięcia wyjściowego osiąga wartość największą**
- → amplitudy napięć na elementach:
  $U_R = U_0$ $\qquad U_L = \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ $\qquad U_C = \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
- → **znika łączna impedancja elementów reaktancyjnych:** $Z = R$
- → napięcia na kondensatorze i indukcyjności osiągają wartości maksymalne (ich amplitudy mogą nawet przekroczyć amplitudę napięcia wejściowego)

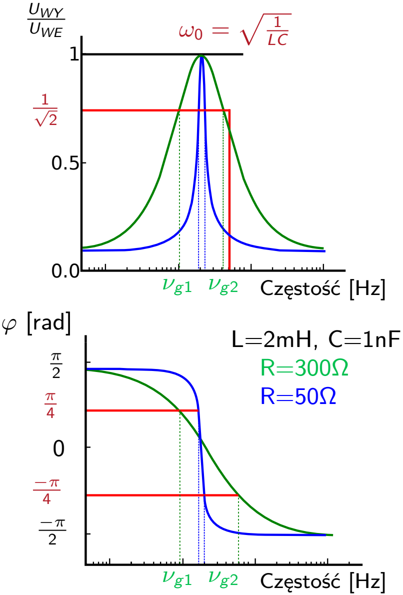
Pasmo przenoszenia filtru rezonansowego szeregowego



- Pasmo przenoszenia zlokalizowane jest w okolicach częstości rezonansu: $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$
- Pasmo przenoszenia filtru rozciąga się od ν_{g1} do ν_{g2} - częstości graniczne
- Dla częstości granicznych:

$$\frac{|U_{WY}|}{|U_{WE}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\varphi| = \frac{\pi}{4}$$



Dobroć obwodu

- Dobroć wyraża stosunek energii zmagazynowanej w układzie rezonansowym (E_L) do mocy traconej (P) w ciągu jednego okresu drgań (T) przy częstości rezonansowej:

$$Q = \frac{2\pi}{T}\frac{E_L}{P}$$

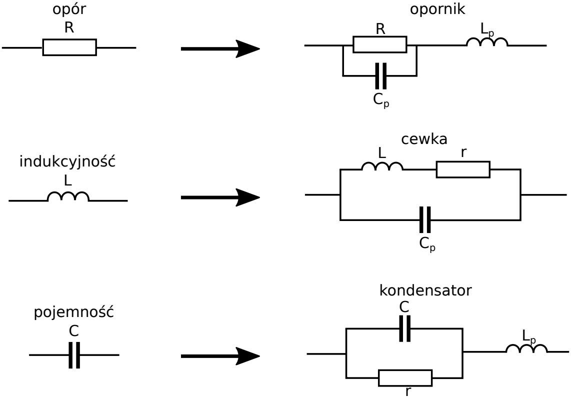
- Dobroć można wyrazić przez amplitudy napięcia dla częstotliwości rezonansowej:

$$Q = \frac{U_L}{U_0} = \frac{U_C}{U_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Magazynowanie energii w elementach reaktancyjnych obwodu rezonansowego o wysokiej dobroci i wywołane przez nie „podbijanie” napięcia jest wykorzystywane do filtracji i transformowania sygnałów o określonej częstości

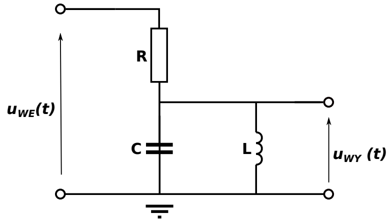
Rzeczywiste bierne elementy układów

- Opór, indukcyjność i pojemność to pojęcia teoretyczne
- Rzeczywiste konstrukcje - opornik, cewka czy kondensator zawierają **wielkości pasożytnicze** (z indeksem p) i są złożonym układem impedancji



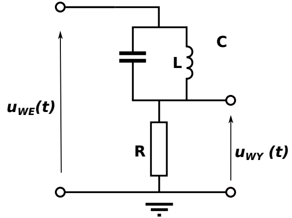
Przy pewnych częstościach sygnału wielkości pasożytnicze mogą istotnie zniekształcić własności elementu

Filtr rezonansowy równoległy



$$u_{WY}(t) = u_{WE}(t)\frac{\left(j\omega C+\frac{1}{j\omega L}\right)^{-1}}{R+\left(j\omega C+\frac{1}{j\omega L}\right)^{-1}}$$

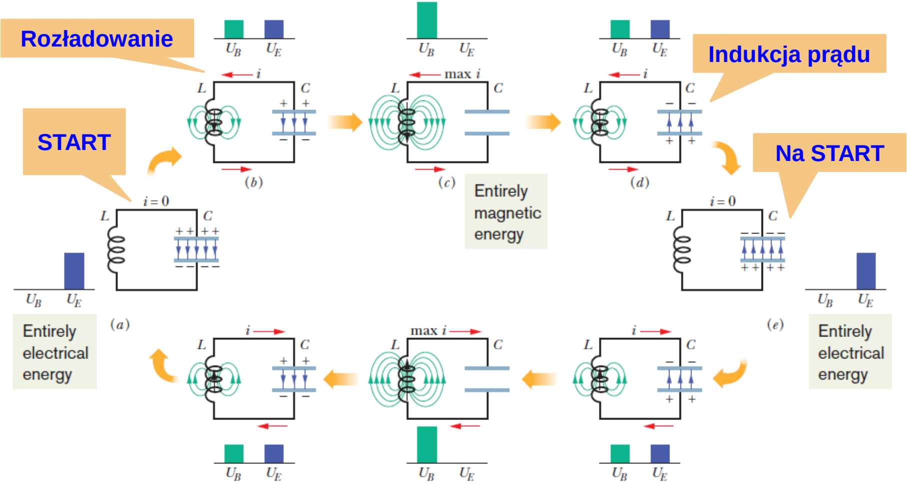
Dla częstości rezonansowej napięcie wyjściowe osiąga wartość największą



$$u_{WY}(t) = u_{WE}(t)\frac{R}{R+\left(j\omega C+\frac{1}{j\omega L}\right)^{-1}}$$

Dla częstości rezonansowej napięcie wyjściowe osiąga wartość najmniejszą

Dodatek - magazynowanie energii w układzie LC



Drgania układu LC

- **START** – zaczynamy od całkowicie naładowanego kondensatora. Prąd nie płynie, cała energia pochodzi z pola elektrycznego kondensatora:

$$E_E = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

- **ROZŁADOWANIE** – kondensator się rozładowuje, przez układ zaczyna płynąć prąd. Energia kondensatora maleje, rośnie energia cewki:

$$E_B = \frac{1}{2} LI^2$$

- **INDUKCJA PRĄDU** w cewce – malejący prąd przepływający przez cewkę indukuje w niej prąd, który podtrzymuje pierwotny prąd. Ładuje wtedy kondensator, ale z przeciwną polarnością.

- **NA START-** cykl powtarza się, ale prąd płynie w **przeciwną stronę.**