
Technologie informacyjne i komunikacyjne R**Mathematica**

- Zad. 1.** Oblicz wartość $\sqrt{2}$ z dokładnością do 100 cyfr w zapisie dziesiętnym.
- Zad. 2.** Oblicz ile końcowych zer jest w zapisie dziesiętnym 2013!
- Zad. 3.** Wymnóż $(a + b)^5$.
- Zad. 4.** Zapisz w postaci iloczynowej $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$.
- Zad. 5.** Rozwiąż równanie $ax^2 + bx + c = 0$ i następnie sprawdź uzyskane rozwiązania.
- Zad. 6.** Oblicz granice

1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[100]{n^{100} + n^{99}} - n$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left[\left(1 + \frac{p}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{q}{n}\right)^p \right]$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n}\right)$$

4.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6}$$

- Zad. 7.** Rozwiąż równania i układ równań. Sprawdź otrzymane wyniki.

1.

$$z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$$

2.

$$z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$$

3.

$$\begin{cases} (1 + i)z_1 + (1 - i)z_2 = 1 + i \\ (1 - i)z_1 + (1 + i)z_2 = 1 + 3i \end{cases}$$

Zad. 8. Oblicz A^{-1} i wyrażenie AA^{-1} , gdy

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

Zad. 9. Oblicz

1.

$$e \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$\log \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \right]$$

Zad. 10. Dla macierzy M znajdź wektory i odpowiadające im wartości własne. Sprawdź otrzymane wyniki. Następnie rozwiąż równanie charakterystyczne dla tej macierzy.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Zad. 11. Zakładając wielomianową lub wymierną postać wyników oblicz następujące sumy. (Pomimo, że polecenie `Sum` od razu wypisze wynik, proszę rozwiązać odpowiedni układ równań poleceniem `Solve`.)

1.

$$S(n) = 1 + 2 + \dots + n$$

2.

$$S(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

3.

$$S(n) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}$$

Zad. 12. Oblicz pochodną wielomianu $w(x) = ax^5 + (b+1)x^3 + 7x + 1$.

Zad. 13. Oblicz $f^{(10)}(x)$ oraz $f^{(10)}(0)$ dla $f(x) = x^2 \cos 2x$.

Zad. 14. Oblicz następujące całki. Otrzymany wynik sprawdź przez różniczkowanie.

1.
$$\int (x^2 - 2x + 3)e^x dx$$
2.
$$\int \sqrt{x}(\log x)^2 dx$$
3.
$$\int \frac{x^4}{x^2 + 1} dx$$
4.
$$\int \frac{1}{x + \sqrt{x - x^2}} dx$$
5.
$$\int \sqrt{e^{2x} + 2e^x + 4} dx$$

Zad. 15. Oblicz następujące całki.

1.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x + 1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} dx$$
2.
$$\int_1^{\infty} \frac{x \log^3 x}{x^4 + 1} dx$$

Zad. 16. Sprawdź, że funkcja f spełnia równanie Laplace'a

$$0 = \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

1. $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = \sin x \cosh y$
3. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

Zad. 17. Rozwiąż równania. Sprawdź otrzymane rozwiązania.

1. $y' \cos x - y \sin x = 2x$
2. $y' + \sin y + x \cos y + x = 0$
3. $2yy'' - 2y'^2 + y^2 = 0$

$$4. yz_x - xz_y = (y - x)z$$

Zad. 18. Zdefiniuj funkcję silnia obliczającą $n!$ metodą rekurencyjną, tzn. $n! = n(n-1)!$ Następnie oblicz przy pomocy tej funkcji $2013!$ i porównaj z wynikiem otrzymanym poleceniem $2013!$.

Wskazówka. Zmienna `$RecursionLimit` określa maksymalną liczbę wywołań rekurencyjnych funkcji w czasie obliczeń. W celu obliczenia $2013!$ zwiększ wartość tej zmiennej (np. do nieskończoności).

Zad. 19. Narysuj wykres funkcji $\sin x$ dla $x \in \{0, \pi\}$.

Zad. 20. Narysuj wykres funkcji $\sin x \cos y$ dla $x, y \in \{-\pi, \pi\}$.

Zad. 21. Narysuj krzywą $(\cos 5t, \sin 3t)$ dla $t \in \{0, 2\pi\}$.

Zad. 22. Narysuj zbiór punktów spełniających równanie $x^2 + y^2 = 9$.

Rozwiązania zadań

Zad. 1. Powrót do treści zadania

```
In[1] := N[Sqrt[2], 100]
```

Zad. 2. Powrót do treści zadania

```
In[1] := 2013!
```

```
In[2] := FactorInteger[%]
```

$$2013! = 2^{2004} \cdot 3^{1002} \cdot 5^{501} \cdot \dots$$

W zapisie dziesiętnym występuje 501 końcowych zer.

Zad. 3. Powrót do treści zadania

```
In[1] := Expand[(a+b)^5]
```

Zad. 4. Powrót do treści zadania

```
In[1] := Factor[x^3+6 x^2+11 x+6]
```

Zad. 5. Powrót do treści zadania

```
In[1] := a x^2+b x+c
```

```
In[2] := Solve[%==0,x]
```

```
In[3] := %1 /. %2[[1]]
```

```
In[4] := Simplify[%]
```

```
In[5] := %1 /. %2[[2]]
```

```
In[6] := Simplify[%]
```

Zad. 6. Powrót do treści zadania

1. `In[1] := Limit[(n^100+n^99)^(1/100)-n,n->Infinity]`

2. `In[2] := Limit[n^2((1+p/n)^q-(1+q/n)^p),n->Infinity]`

3. Obliczenie

```
In[3] := Limit[2^(-n) Product[1+i/n,{i,1,n}],n->Infinity]
```

4. `Limit[Sum[i^5,{i,1,n}]/n^6,n->Infinity]`

Zad. 7. Powrót do treści zadania

1. In[1] := $z^2 - (1+i)z + 6 + 3i$
 In[2] := Solve[$\% == 0, z$]
 In[3] := %1 /. %2[[1]]
 In[4] := %1 /. %2[[2]]
2. In[1] := $z \text{ Conjugate}[z] + (z - \text{Conjugate}[z]) - 3 + 2i$
 In[2] := Solve[$\% == 0, z$]
3. In[1] := Solve[$\{(1+i)z_1 + (1-i)z_2 == 1+i, (1-i)z_1 + (1+i)z_2 == 1+3i\}, \{z_1, z_2\}$]

Zad. 8. Powrót do treści zadania

```
In[1] := m = {{Cos[fi], -Sin[fi]}, {Sin[fi], Cos[fi]}}
In[2] := MatrixForm[m]
In[3] := mInv = Simplify[Inverse[m]]
In[4] := MatrixForm[mInv]
In[5] := MatrixForm[Simplify[m.mInv]]
```

Zad. 9. Powrót do treści zadania

1. Obliczenie e^m związane jest z funkcją MatrixExp. Rozwiązanie jest następujące.
 In[1] := MatrixForm[MatrixFunction[Exp, {{0, 1, 2}, {0, 0, 6}, {0, 0, 0}}]]
2. In[1] := MatrixForm[MatrixFunction[Log, {{3, 1}, {-4, -1}}]]

Zad. 10. Powrót do treści zadania

```
In[1] := m = {{2, -1, 1}, {-2, 1, 2}, {-1, -1, 4}}
In[2] := a = Eigenvalues[m]
In[3] := v = Eigenvectors[m]
In[4] := m.v[[1]] - a[[1]] v[[1]]
In[5] := m.v[[2]] - a[[2]] v[[2]]
In[6] := m.v[[3]] - a[[3]] v[[3]]
In[7] := Solve[m.m + a m + b m + c IdentityMatrix[3] == 0, {a, b, c}]
```

Zad. 11. Powrót do treści zadania

Wprowadzam pomocniczą funkcję $s(n)$ odpowiadającą sumie pierwszych n -składników. Znalezienie rozwiązań dla innych sum będzie wymagało zmiany definicji tej funkcji.

```
In[1] := s[n_] := Sum[i, {i, 1, n}]
```

Zakładam, że suma wyraża się funkcją wielomianową i wprowadzam funkcję $w(x, n)$ będącą wielomianem n -tego stopnia zmiennej x o współczynnikach a_i . (Przyjmując inne założenie, np. że suma wyraża się funkcją wymierną należy wprowadzić analogiczną funkcję $q(x, l, m) = \frac{w(x, l)}{w(x, m)}$.)

```
In[2] := w[x_, n_] := Sum[a[i] x^i, {i, 0, n}]
```

Zadaniem kolejnej funkcji $r(n)$ będzie wypisanie rozwiązań (nadokreślonego) układu $n + 1$ równań

$$\begin{cases} s(1) = w(1, n - 1) \\ s(2) = w(2, n - 1) \\ \dots \\ s(n) = w(n, n - 1) \\ s(n + 1) = w(n + 1, n - 1) \end{cases}$$

```
In[3] := r[n_] := Solve[Table[s[i]==w[i,n-1],{i,1,n+1}],Table[a[i],{i,0,n-1}]]
```

Następnie wypisuję rozwiązania $r(1), r(2), \dots, r(i)$ do momentu kiedy uzyskam niepusty zbiór rozwiązań. Czynność tę mogę zautomatyzować korzystając ze (związanej już z programowaniem) funkcji iteracyjnej `For`.

```
In[4] := For[i=1,Length[r[i]]==0,++i]; Simplify[Factor[w[n,i-1] /. r[i]]]
```

Zad. 12. Powrót do treści zadania

```
In[1] := w[x_] := a x^5 + (b+1)x^3 + 7x + 1
```

```
In[2] := D[w[x], x]
```

Zad. 13. Powrót do treści zadania

```
In[1] := f[x_] := x^2 Cos[2x]
```

```
In[2] := D[f[x], {x, 10}]
```

```
In[3] := % /. x->0
```

Zad. 14. Powrót do treści zadania

```
1. In[1] := Integrate[(x^2-2x+3)E^x, x]
   In[2] := Simplify[D[%, x]]
```

```
2. In[1] := Integrate[Sqrt[x]Log[x]^2, x]
   In[2] := Simplify[D[%, x]]
```

3. In[1] := Integrate[x^4/(x^2+1), x]
In[2] := Simplify[D[%, x]]
4. In[1] := 1/(x+Sqrt[x-x^2])
In[2] := Integrate[%, x]
In[3] := Simplify[D[%, x]-%]
5. In[1] := Integrate[E^(2x)+2 E^x+4, x]
In[2] := Simplify[D[%, x]]

Zad. 15. Powrót do treści zadania

1. In[1] := f[x_] := (x+1)/(x^2+1)^(3/2)
In[2] := Integrate[f[x], x]
In[3] := Simplify[D[f[x], x]]
In[4] := Integrate[f[x], {x, -Infinity, Infinity}]
2. In[1] := f[x_] := x Log[x]^3/(x^4+1)
In[2] := Simplify[Integrate[f[x], x]]
In[3] := Simplify[D[%, x]]
In[4] := Simplify[Integrate[f[x], {x, 1, Infinity}]]

Zad. 16. Powrót do treści zadania

1. In[1] := x/(x^2+y^2)
In[2] := Simplify[D[%, {x, 2}] + D[%, {y, 2}]]
2. In[1] := Sin[x] Cosh[y]
In[2] := Simplify[D[%, {x, 2}] + D[%, {y, 2}]]
3. In[1] := Log[x^2+y^2]
In[2] := Simplify[D[%, {x, 2}] + D[%, {y, 2}]]

Zad. 17. Powrót do treści zadania

1. In[1] := y'[x] Cos[x] - y[x] Sin[x] - 2x
In[2] := DSolve[% == 0, y[x], x]
In[3] := y[x_] := x^2 Sec[x] + C[1] Sec[x]
In[4] := Simplify[%1]
2. In[1] := y'[x] + Sin[y[x]] + x Cos[y[x]] + x
In[2] := DSolve[% == 0, y[x], x]
In[3] := y[x_] := 2 ArcTan[1-x+E^(-x)C[1]]
In[4] := Simplify[%1]


```
3. In[1]:= 2 y[x] y''[x] - 2 y'[x]^2 + y[x]^2
In[2]:= DSolve[%==0,y[x],x]
In[3]:= y[x_]:=E^(1/4(-x^2+4 C[1]+2 x C[2] - C[2]^2))
In[4]:= Simplify[%1]

4. In[1]:= y D[z[x,y],x]-x D[z[x,y],y]-(y-x)z[x,y]
In[2]:= DSolve[%==0,z[x,y],{x,y}]
In[3]:= z[x_,y_]:=E^(x+y) C[1] (x^2+y^2)
In[4]:= Simplify[%1]
```

Zad. 18. Powrót do treści zadania

```
In[1]:= silnia[n_]:=n silnia[n-1]
In[2]:= silnia[0]:=1
In[3]:= $RecursionLimit=Infinity
In[4]:= silnia[2013]
```

Zad. 19. Powrót do treści zadania

```
In[1]:= Plot[Sin[x],{x,0,Pi}]
```

Zad. 20. Powrót do treści zadania

```
In[1]:= Plot3D[Sin[x]Cos[y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]
```

Zad. 21. Powrót do treści zadania

```
In[1]:= ParametricPlot[{Cos[5t],Sin[3t]},{t,0,2 Pi}]
```

Zad. 22. Powrót do treści zadania

```
In[1]:= ContourPlot[x^2+y^2==9,{x,-3,3},{y,-3,3}]
```