

Matematyka dla Optyków Okularowych III

Praca domowa 1

Zadanie 1

Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu następujących funkcji i sprawdź czy pochodne mieszane są rzeczywiście równe

$$\text{a) } f(x, y) = \sin(x^2 + y^2), \quad \text{b) } f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

Zadanie 2

Rozwiń w szereg Taylora funkcje $f(x, y) = \ln(1 + x + yx^2)$ wokół punktu $(0, 0)$ do wyrazów drugiego rzędu.

Zadanie 3

Znajdź wszystkie ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = y^3 + 3yx^2 - 51y - 24x$. Dla każdego ekstremum określ czy jest ono minimum czy maksimum.

Zadanie 4

Ekstrema warunkowe: Częstym problemem jest problem znalezienia ekstremum danej funkcji $f(x, y)$ przy dodatkowym warunku $g(x, y) = 0$. Problem ten możemy rozwiązać na dwa sposoby:

- Warunek $g(x, y) = 0$ zadaje funkcje $y(x)$ którą można wprowadzić bezpośrednio do funkcji $f(x, y)$ dostając $F(x) = f(x, y(x))$. W ten sposób dostajemy funkcję jednej zmiennej $F(x)$. By znaleźć ekstremum możemy wtedy skorzystać ze znanych metod dla funkcji jednej zmiennej.
- Alternatywną metodą jest metoda Lagrange'a (metoda mnożników Lagrange'a). W tej metodzie konstruujemy nową funkcję $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, która zależy od parametru λ zwanego mnożnikiem Lagrange'a. Punkt stacjonarny (x_0, y_0) funkcji $f(x, y)$ przy warunku $g(x, y) = 0$ jest wtedy rozwiązaniem układu równań

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0.$$

Zastosuj obie metody by znaleźć ekstremum funkcji $f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$ przy warunku $g(x, y) = x - y + 2 = 0$.