

Matematyka dla Optyków Okularowych III

Praca domowa 2

Zadanie 1

Rozwinąć w szereg Fouriera na przedziale $x \in [-\pi, \pi]$ funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\pi < x \leq 0 \\ -x & \text{dla } 0 < x \leq \pi \end{cases}.$$

Następnie:

- wyznaczyć wartości funkcji $f(x)$ oraz szeregu w punkcie $x = 0$.
- pokazać, że

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Zadanie 2

Wyrazić następujące wielomiany Zernicke'a

$$\begin{aligned} \text{a) } Z_2^{-2}(r, \theta) &= r^2 \sin(2\theta), & \text{b) } Z_2^0(r, \theta) &= 2r^2 - 1, & \text{c) } Z_2^2(r, \theta) &= r^2 \cos(2\theta), \\ \text{d) } Z_3^{-3}(r, \theta) &= r^3 \sin(3\theta), & \text{e) } Z_3^3(r, \theta) &= r^3 \cos(3\theta). \end{aligned}$$

za pomocą współrzędnych kartezjańskich $x = r \sin \theta$, $y = r \cos \theta$.

Wskazówka: $(y + ix)^m = r^m(\cos(m\theta) + i \sin(m\theta))$, $r^2 = x^2 + y^2$.

Zadanie 3

Pewna funkcja zadana jest za pomocą współrzędnych kartezjańskich jako

$$f(x, y) = 20x + 10y + 3, \quad D_f = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Wyrazić tą funkcję we współrzędnych biegunowych a następnie znaleźć jej rozwinięcie w przestrzeni wielomianów Zernicke'a

- korzystając z definicji współczynników Zernicke'a

$$a_n^m = \frac{2n+2}{\epsilon_m \pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) Z_n^m(r, \theta) r \, dr \, d\theta, \quad b_n^m = \frac{2n+2}{\epsilon_m \pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(r, \theta) Z_n^{-m}(r, \theta) r \, dr \, d\theta.$$

- jako kombinację funkcji Z_n^m (zadanych w tabeli)

Zadanie 4

W optyce wielomianów Zernicke'a używa się do opisu charakterystycznych zniekształceń frontu falowego. Wielomian rzędu zerowego Z_0^0 opisuje przesunięcie, wielomiany rzędu pierwszego Z_1^1 i Z_1^{-1} opisują nachylenie, wielomiany rzędu drugiego opisują aberracje przeogniskowania (Z_2^0) i astygmatyzmu (Z_2^{-2} oraz Z_2^2). Wartości liczbowe odpowiadających im współczynników a_n^m i b_n^m nazywane są "spektrum aberracji". Wyznaczyć spektrum aberracji dla funkcji o postaci

$$f(r, \theta) = 2r^3 \cos(\theta) + 5r^2 \cos^2(\theta) + r \sin(\theta).$$

Przydatne informacje: Wielomiany Zernicke'a niskich rzędów (kolejne są podane w treści Zadania 2):

$$Z_0^0(r, \theta) = 1, \quad Z_1^{-1}(r, \theta) = r \sin \theta, \quad Z_1^1(r, \theta) = r \sin \theta.$$

Symbol ϵ_m w Zadaniu 3 oznacza

$$\epsilon_m = \begin{cases} 2, & m = 0, \\ 1, & m \neq 0. \end{cases}$$