

Matematyka dla Optyków Okularowych III

Tydzień 1 — funkcje dwóch zmiennych

Zadanie 1

Wyznacz dziedzinę (zbiór dopuszczalnych argumentów) następujących funkcji

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{3x + 2}{x^2 + y^2 - 1}, \quad \text{b) } f(x, y) = \sqrt{1 - x + y}.$$

Zadanie 2

Policz granicę następujących wyrażeń:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{x^2 + 3}{x + y}, & \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x^2 y + y^2}{xy - 2y}, \\ \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{xy}, & \quad \text{d) } \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \exp(x^2 + 2y). \end{aligned}$$

Zadanie 3

Znajdź wszystkie punkty w których funkcja

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x > 0, \\ \sqrt{x^2 + y^2}, & x \leq 0, \end{cases}$$

jest ciągła.

Zadanie 4

Przeanalizuj we współrzędnych biegunowych granicę w zerze funkcji $f(x, y) = xy/(x^2 + y^2)$.

Zadanie 5

Policz obie pochodne cząstkowe następujących funkcji

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= x^3 + 3xy + 5y^2, & \text{b) } f(x, y) &= \sin(xy) + \cos(yx) - \sin(y), \\ \text{c) } f(x, y) &= \sqrt{x^2 + xy}, & \text{d) } f(x, y) &= \exp(-(x^2 + y^2)). \end{aligned}$$

Dla punktu b) policz też pochodne drugiego rzędu i sprawdź czy pochodne mieszane są sobie równe.

Zadanie 6

Sprawdź czy funkcja $f(x, y) = \cos(ax) \sin(by)$ spełnia następujące równanie różniczkowe

$$b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$