

Matematyka dla Optyków Okularowych III

Tydzień 12 - całki zespolone

Zadanie 1

Sprawdzić w jakich punktach $z \in \mathbf{C}$ następujące funkcje spełniają warunki Cauchy-Riemanna

$$\text{a) } f(z) = z^2, \quad \text{b) } f(z) = |z|^2. \quad (1)$$

Zadanie 2

Udowodnij twierdzenie Green'a

$$\oint_{\mathcal{C}} (f dx + g dy) = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy,$$

dla krzywej $\mathcal{C}$ będącej brzegiem kwadratu $\mathcal{D}$.

Zadanie 3

Korzystając z powyższego twierdzenia Green'a pokaż, że dla funkcji zespolonej $f(z) = u(z) + iv(z)$, gdzie $u(z)$ i $v(z)$ są funkcjami o wartościach rzeczywistych, spełniającej równania Cauchy-Riemanna, zachodzi

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0. \quad (2)$$

Zadanie 4

Pokaż, że

$$\oint_{\mathcal{C}} z^n dz = 0, \quad n \geq 0, \quad (3)$$

dla krzywej $\mathcal{C}$ będącej okręgiem o promieniu R wokół początku układu współrzędnych.

Zadanie 5

Pokaż, że

$$\oint_{\mathcal{C}} z^{-1} dz = 2\pi i, \quad (4)$$

dla krzywej $\mathcal{C}$ będącej okręgiem o promieniu R wokół początku układu współrzędnych.

Zadanie domowe 1

Dana jest część rzeczywista $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ i urojona $v(x, y) = 2xy + y$ funkcji zespolonej $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$. Przedstaw funkcję f jako funkcję zmiennej zespolonej $z = x + iy$.

Zadanie domowe 2

Znaleźć funkcję holomorficzną $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ a następnie zapisać ją w postaci zespolonej wiedząc, że $u(z) = x^2 - y^2 + xy$.