

Matematyka dla Optyków Okularowych III

Tydzień 13 - całki zespolone

Zadanie 1

Udowodnij wzory na współczynniki a_{-n} i b_l rozwinięcia w szereg Laurenta funkcji $f(z)$ wokół punktu z_0 ,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{l=0}^{\infty} b_l(z - z_0)^l.$$

Zadanie 2

Oblicz następujące całki

$$\begin{aligned} \text{a) } I_1 &= \oint_{\mathcal{C}_1} z dz, & \text{b) } I_2 &= \oint_{\mathcal{C}_1} \bar{z} dz, \\ \text{c) } I_3 &= \oint_{\mathcal{C}_2} z dz, & \text{d) } I_4 &= \oint_{\mathcal{C}_2} \bar{z} dz, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{C}_1$ jest łukiem paraboli $y = x^2$ od punktu $O(0, 0)$ do punktu $A(1, 1)$, a $\mathcal{C}_2$ jest prostą łamaną od punktu O do punktu A przez punkt $B(1, 0)$.

Zadanie 3

Oblicz całkę $\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2 - 4} dz$ gdzie $\mathcal{C} = \{z : |z - 2| = 1/2\}$ jest krzywą zorientowaną dodatnio.

Zadanie 4

Oblicz całkę $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2}$ przedstawiając ją jako całkę zespoloną i korzystając z tw. Cauchyego. *Wskazówka: skorzystaj z tego, że $\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$ a następnie z podstawienia $z = e^{i\theta}$.*

Zadanie 5

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kx}{x^2 + a^2} dx$ dla $k > 0$ i $a > 0$.

Zadanie domowe 1

Oblicz całkę $\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2 - 4} dz$ gdzie $\mathcal{C} = \{z : |z + 2| = 1/2\}$ jest krzywą zorientowaną dodatnio. Następnie oblicz całkę $\oint_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2 - 4} dz$ gdzie $\mathcal{C} = \{z : |z| = 4\}$.

Zadanie domowe 2

Oblicz całkę $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + 8 \cos^2 \theta}$ przedstawiając ją jako całkę zespoloną i korzystając z tw. Cauchyego.

Zadanie domowe 3

Oblicz całkę $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$.