

Matematyka dla Optyków Okularowych III

Tydzień 3 — funkcje dwóch zmiennych

Zadanie 1

Znajdź ekstrema lokalne następujących funkcji

$$\text{a) } f(x, y) = x^2 + xy + 2x + y^2, \quad \text{b) } f(x, y) = x^2y - xy^2 + \frac{1}{3}y^3 - 9y + 1,$$

Zadanie 2

Liczbę $a > 0$ zapisać w postaci sumy trzech liczb $a = x + y + z$ tak, że ich iloczyn $x \cdot y \cdot z$ jest maksymalny.

Zadanie 3

Zamiana zmiennych i pochodne kierunkowe: Obracamy układ współrzędnych, tak że nowe współrzędne (x', y') wyrażają się przez stare (x, y) w następujący sposób

$$x' = x \cos \phi + y \sin \phi, \quad y' = -x \sin \phi + y \cos \phi,$$

gdzie ϕ jest pewnym ustalonym kątem.

- Policz pochodne funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ względem x' i y' na dwa sposoby:
 1. wyrażając funkcje f w nowych zmiennych (x', y') ,
 2. korzystając z pochodnej funkcji złożonej.
- Zapisz ogólny wzór (dla dowolnej funkcji f) na pochodną względem x' danego wyżej - wzór ten określa tak zwaną pochodną kierunkową.

Pochodna kierunkowa mówi o tym jak wartość funkcji zmienia się w zadanym kierunku (w naszym przypadku w kierunku zadanym przez x'), analogicznie do tego jak $\partial_x f$ mówi o zmianie wartości funkcji w kierunku x (czy wzdłuż osi x).

Zadanie 4

Policz pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$ w kierunku wektora $\vec{v} = [1, 4]$.

Zadanie domowe 1

Policz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu następujących funkcji

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \frac{x}{y}, & \text{b) } f(x, y) &= \frac{x-2}{y-1}, \\ \text{c) } f(x, y) &= xy \cos(xy), & \text{c) } f(x, y) &= \ln(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Policz pochodne cząstkowe drugiego rzędu następujących funkcji

$$\text{a) } f(x, y) = \frac{3-3x}{y+2}, \quad \text{b) } f(x, y) = e^{xy}.$$

Zweryfikuj, że pochodne mieszane są sobie równe.

Zadanie domowe 2

Rozwiń w szereg Taylora do drugiego rzędu funkcje $f(x, y) = e^{xy}$ wokół punktu $(x, y) = (1, 2)$.

Zadanie domowe 3

Znajdź ekstrema lokalne następujących funkcji

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= x^4 + y^4, \\ \text{b) } f(x, y) &= (1 + e^x) \cos y - xe^x. \end{aligned}$$