

# Matematyka dla Optyków Okularowych III

## Tydzień 5 — geometria różniczkowa

### Zadanie 1

Pokaż równania Lagrange'a  $|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2$ .

### Zadanie 2

Sfera jest dana równaniem  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ , gdzie  $R$  jest promieniem.

- Zweryfikuj, że poniższe równania opisują sferę

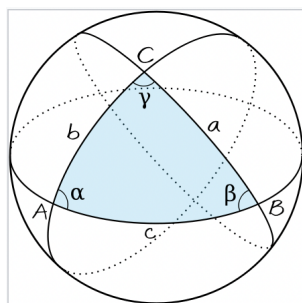
$$x(u, v) = R \sin u \cos v, \quad y(u, v) = R \sin u \sin v, \quad z(u, v) = R \cos u,$$

dla  $u \in [0, \pi]$  i  $v \in [0, 2\pi]$ .

- Korzystając z powyższej parametryzacji policz współczynniki  $E, F, G$  pierwszej formy fundamentalnej.
- Korzystając z tych współczynników policz pole powierzchni sfery.

### Zadanie 3

Oblicz długości ramion  $a, b, c$ , trójkąta sferycznego o promieniu  $R$  z poniższego rysunku przyjmując, że kąty  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  są kątami prostymi. Sprawdź, czy zachodzi twierdzenie Pitagorasa.



### Zadanie domowe 1

Elipsoida obrotowa spłaszczona dana jest równaniem

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a^2 > c^2.$$

- Zweryfikuj, że poniższa parametryzacja opisuje elipsoidę obrotową

$$x(u, v) = a \sin u \cos v, \quad y(u, v) = a \sin u \sin v, \quad z(u, v) = c \cos u,$$

dla  $u \in [0, \pi]$  i  $v \in [0, 2\pi]$ .

- Korzystając z powyższej parametryzacji policz współczynniki  $E, F, G$  pierwszej formy fundamentalnej.

### Zadanie domowe 2

Paraboloida hiperboliczna dana jest równaniem

$$z = \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}.$$

Policz współczynniki  $E, F$  i  $G$  pierwszej formy kwadratowej.