

Matematyka dla Optyków Okularowych III

Tydzień 6 — geometria różniczkowa

Zadanie 1

Pokaż, że wektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Zadanie 2

Korzystając ze standardowej parametryzacji sfery,

$$x(u, v) = R \sin u \cos v, \quad y(u, v) = R \sin u \sin v, \quad z(u, v) = R \cos u,$$

dla $u \in [0, \pi]$ i $v \in [0, 2\pi]$, policz drugą formę fundamentalną. Korzystając z pierwszej formy fundamentalnej policzonej na poprzednich zajęciach, wyznacz krzywiznę Gaussa K , krzywiznę średnią H .

Zadanie 3

Pokaż, że krzywizny fundamentalne są rozwiązaniem równania

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0.$$

Korzystając z tego równania policz krzywizny fundamentalne sfery z poprzedniego zadania.

Zadanie 4

Oblicz w zależności od parametru a pierwszą formę fundamentalną, wektor normalny, drugą formę fundamentalną, krzywiznę Gaussa i krzywiznę średnią każdego punktu paraboloidy eliptycznej o równaniu $z = x^2 + ay^2$.

Zadanie domowe 1

Elipsoida obrotowa spłaszczona opisana jest następującą parametryzacją

$$x(u, v) = a \sin u \cos v, \quad y(u, v) = a \sin u \sin v, \quad z(u, v) = c \cos u,$$

dla $u \in [0, \pi]$ i $v \in [0, 2\pi]$. Policz współczynniki L, M, N drugiej formy fundamentalnej. Oblicz krzywiznę Gaussa.

Zadanie domowe 2

Paraboloida hiperboliczna dana jest równaniem

$$z = \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2b^2}.$$

Policz współczynniki L, M i N drugiej formy kwadratowej. Oblicz krzywiznę Gaussa.