

Matematyka dla Optyków Okularowych III

Tydzień 9— szeregi Fouriera (reprezentacja wykładnicza)

Zadanie 1

Funkcja $f(x) = x^2$ ma następujące rozwinięcie w szereg Fouriera

$$f(x) = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2} \cos(2\pi n x).$$

Sprawdź czy jej pochodna, policzona z różniczkowania szeregu Fouriera, zgadza się z $f'(x) = 2x$. Powtórz obliczenia dla drugiej pochodnej $f''(x) = 2$.

Zadanie 2

Korzystając z rozwinięcia funkcji e^x , $\sin x$ i $\cos x$ w szereg Taylora i z własności $i^2 = -1$ pokaż, że

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Zadanie 3

Szereg Fouriera możemy zapisać korzystając z funkcji e^{ix} jako (dla $L = 1$ czyli na przedziale $[-1/2, 1/2]$)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x},$$

gdzie c_n są liczbami zespolonymi takimi, że $c_n = c_{-n}^*$. Warunek ten gwarantuje, że wartościami $f(x)$ są liczby rzeczywiste. Znajdź związek pomiędzy współczynnikami a_n i b_n a c_n .

Zadanie 4

Współczynniki c_n możemy też policzyć mnożąc funkcję $f(x)$ przez $e^{-2\pi i m x}$ i całkując po przedziale $[-1/2, 1/2]$. Pokaż w ten sposób, że

$$c_n = \int dx f(x) e^{2\pi i n x}.$$

Zadanie domowe 1

Korzystając z formy wykładniczej szeregu Fouriera rozwiń funkcję $f(x) = x^2$ na przedziale $[-1/2, 1/2]$. Sprawdź wynik porównując z rozwinięciem podanym w Zadaniu 1.