Wstęp do teorii oddziaływań fundamentalnych
Zadania domowe

1 Grupa Lorentza

1.1 Wykaz równość:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(k^2 - m^2)\theta(k^0),$$

przy czym funkcja $\theta(x) = 1$ dla $x \geq 0$ i $\theta(x) = 0$ dla $x < 0$. Ponadto przydatne mogą się okazać:

$$\delta[y(x)] = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|y'(x_i)|}, \qquad y' = \frac{dy}{dx}, \qquad x_i - \text{bieguny } y(x).$$

Czy obiekt ten jest niezmienniczy lorentzowsko?

1.2 Wykaż, że (a) $\partial_\mu \phi(x)$, (b) $\partial_\nu \phi(x) \partial^\mu \partial^\nu \phi(x)$

są polami (ko-)wektorowymi jeśli $\phi(x)$ jest polem skalarnym.

1.3 Właściwa grupa Lorentza $O_+^\uparrow(1,3)$ ma podwójne nakrycie $SL(2,\mathbb{C})$. $U \in SL(2,\mathbb{C})$ działa na czterowektory w następujący sposób:

$$\sigma_\mu w^\mu = w \rightarrow \; Uw\, U^+ = \sigma_\mu \Lambda^\mu{}_\nu w^\nu, \qquad U = e^{a_k \sigma^k},\; a_k \in \mathbb{C}$$

Znaleźć U i Λ odpowiadające:

(a). obrotowi o kat ϕ wokół osi OZ

(b). pchnięciu o prędkość v wzdłuż os OZ.

(c). znajdź jawną postać U jako macierzy 2x2 wyrażając występujące funkcje trygonometryczne od zespolonych argumentów przez funkcje od argumentów rzeczywistych zapisując $a_k = b_k + i\, c_k,\; b_k, c_k \in \mathbb{R}$

1.4 Niech spinor Weyla ψ transformuje się względem $U \in SL(2,\mathbb{C})$ wg. formuły: $\psi \rightarrow \; U\psi,\; U = \exp(a_i \sigma^i),\; a_i \in \mathbb{C}$. Pokaż, że $(\psi)_c \equiv i\sigma^2\psi^*$ transformuje się wg. wzoru: $(\psi)_c \rightarrow \; \bar{U}(\psi)_c$, gdzie $U^+\bar{U} = 1$. ($\sigma^2(\sigma^i)^*\sigma^2 = -\sigma^i$)

1.5 Niech pola spinorowe ψ, χ transformuje się względem $U \in SL(2, \mathbb{C})$ wg. formuły: $\psi'(x') = U\psi(x), \chi'(x') = U\chi(x)$ (oznaczenia takie jak w zad.1.3, 1.4). Pokaz, że wyrażenia poniżej są kowariantne.

$$(a)\ \ i\overline{\sigma}^{\,\mu}\partial_\mu\psi - m(\chi)_c = 0, \qquad (b)\ \ i\sigma^\mu\partial_\mu(\chi)_c - m\psi = 0$$

1.6 Czy pola poniższe transformują się jak lorentzowskie tensory dla pól spinorowych $\psi,\ (\psi)_c$ zdefiniowanych jak powyżej:
(a) $\psi^+\psi$, (b) $\psi^+(\psi)_c$, (c) $\psi^+\sigma^\mu\psi$, (d) $\psi^+\overline{\sigma}^{\,\mu}\psi$, (e) $\psi^+\overline{\sigma}^{\,\mu}(\psi)_c$, (f) $\psi^+\overline{\sigma}^{\,\mu}\sigma^\nu(\psi)_c$.

1.7 Niech $\vec{\pi} = \vec{p} - e\vec{A} = -i\vec{\partial} - e\vec{A}$. Pokaż, że

$$(\vec{\pi}\vec{\sigma})(\vec{\pi}\vec{\sigma}) \ = \ (\vec{\pi}^2 - e\vec{B}\cdot\vec{\sigma}),$$

gdzie $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$, a σ_i są macierzami Pauliego, dla których mamy

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k, \qquad \sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k.$$

2 Pola klasyczny

2.1 Pokazać, że lagranżjan

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\partial_\mu\Phi_\nu\partial^\mu\Phi^\nu + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\Phi^\mu)^2 - \frac{m^2}{2}\,\Phi_\mu\Phi^\mu$$

dla rzeczywistego pola wektorowego Φ_α prowadzi do równań ruchu postaci

$$(\partial^2 + m^2)\Phi_\mu - \partial_\mu\partial_\nu\Phi^\nu = 0$$

i że pole Φ spełnia warunek Lorentza $\partial_\alpha\Phi^\alpha = 0$.

Pola fermionowe

2.2 Pokazać, że jeśli ψ spełnia równanie Diraca to $\overline{\psi} \equiv \psi^+\gamma^0$ spełnia:

$$(i\partial_\mu\overline{\psi}\,\gamma^\mu + \overline{\psi}\,m) = 0$$

Wskaz: $\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = \gamma^+$

2.3 Pokaz, ze prąd fermionowy $j^\mu = -\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ jest zachowany tj. $\partial_\mu j^\mu = 0$, jeśli ψ spełnia równanie Diraca z masą m.

2.4 Dla pola Diraca transformacja $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha\gamma_5}\psi(x)$, gdzie α jest dowolnym parametrem rzeczywistym, nosi nazwę transformacji chiralnej.

a. Pokazać, że lagrangian $\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)$ w granicy $m \to 0$ jest niezmienniczy względem transformacji chiralnych.

b. Wyprowadzić równania ruchu dla pól

$$\psi_L(x) = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi(x), \qquad \psi_R(x) = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi(x)$$

przy niezerowej masie m i pokazać, że równania te rozprzęgają się w granicy $m \to 0$.

2.5 Majorana eq. $i\overline{\partial}\,\psi_L - m(\psi_L)_C = 0$ is covariant equation but it does not have U(1) symmetry $\psi \to e^{i\alpha}\psi$. Find its plane wave solutions.

$\psi_k = (b_s(k)u_k^s e^{-ikx} + b_s(k)^* v_k^s e^{ikx})|_{k0=\omega_k} \quad v_k^s = \frac{i}{2}\sigma^\mu k_\mu \sigma^2 (u_k^s)^*,\ u_k^s = \{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\} \leftarrow$ (?)dim. is wrong

SYMETRIE

W poniższych zadaniach Lagrangiany $\mathcal{L}$ mają symerię Lorentza i występują w nich "operatory" do wymiaru 4 włącznie.

2.6 Skonstruuj najbardziej ogólny U(1) globalnie niezminniczy Lagrangian $\mathcal{L}$ dla modelu teorii pól zawierającego **dwa zespolone pola skalarne** (ϕ_1, ϕ_2) o ładunkach względem G=U(1) wynoszących odpowiednio: $(Q_1 = 1,\ Q_2 = 2)$ i masach (m_1, m_2).

2.7 Napisz $\mathcal{L}$ dla teorii, w której wystepują **dwa zespolone pola** skalarne ϕ_i. Teoria dodatkowo posiada globalną symetrię $G = U(1) \times U(1)$ względem której pola mają nastepujące ładunki: ϕ_1 : $(1,0)$, $\phi_2 : (0,1)$.

2.8 Przedyskutuj możliwosci spontanicznego naruszenia globalnej symetrii $G = U(1)\times U(1)$ w zad. 2.14 w zależności od wartości wyrazów masowych (mogą mieć dowolny znak). Przyjmij, że wszystkie stałe sprzężenia wymiaru 0 dla wyrazów oddziaływania są dodatnie.

2.9 Trzy rzeczywiste pola skalarne $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ transformują się jak wektor grupy G=SO(3). Opisz SSB, gdy $V = -\mu^2(\vec{\phi})^2 + \lambda((\vec{\phi})^2)^2$, $(\mu^2, \lambda > 0)$.

2.10 Pola cechowania

Dla 2.9 przeprowadź analogiczną konstrukcję, gdy grupy G jest symetrią cechowania oraz opisz mechanizm BEH.

2.11 Niech $\phi_i,\ i = 1, 2, 3$ będą trzema rzeczywistymi polami skalarnymi. Zbudujmy macierz $\Phi = \sigma^i\phi^i$. Niech pod działaniem $g \in SU(2)$: $\Phi'(x) = g\Phi g^+$. Napisz SU(2) lokalnie niezmienniczy Lagrangian dla Φ (zawierający odpowiednie pola cechowania) z wyrazami do wymiary 4 włącznie.

2.12 Czy wielkości (a) $\partial_\mu\phi\, \psi^+\sigma^\mu\psi$ oraz (b) $\partial_\mu\phi\, \psi^+\overline{\sigma}^{\,\mu}(\psi)_c$ mogą być skalarami grupy Lorentz, jeśli pole ψ transformuje się tak: $\psi'(x') = U\psi(x)$ a ϕ jest polem skalarnym? Jeśli tak to podaj związek między U a transformacją Lorentza wektorów.

2.13 Przedyskutuj SSB (jakiej symetrii ?, czy zachodzi ?) dla modelu teorii pola o potencjale:

$$V = 2m\varphi\, \phi^*\phi + \lambda_1\varphi^4 + \lambda_2(\phi^*\phi)^2$$

dla $\varphi \in \mathbb{R},\ \phi \in \mathbb{C},\ \lambda_1, \lambda_2 > 0, m \in \mathbb{R}$.

2.14 Napisz $\mathcal{L}$ dla teorii, w której wystepują **dwa zespolone pola** skalarne ϕ_i. Teoria dodatkowo posiada globalną symetrię $G = U(1) \times U(1)$ względem której pola mają nastepujące ładunki: $\phi_1 : (1, 0),\ \phi_2 : (0, 1)$.

3 Kwantówka

3.1 Korzystając z relacji komutacyjnych dla operatorów kreacji i anihilacji pola zespolonego

$$[a(k), a^+(k')] = \tilde{\delta}(k - k'),\ [b(k), b^+(k')] = \tilde{\delta}(k - k').$$

pokazać, że dla dowolnych $x_0,\ y_0$ zachodzi

$$[\phi(x), \phi^+(y)] = \int \tilde{dk}\ (e^{-ik(x-y)} - e^{ik(x-y)})|_{k_0=\omega_k}.$$

Ile wynosi $[\phi(x), \phi(y)]$?

3.2 Wyrazić przez operatory kreacji i anihilacji dla zespolonego pola skalarnego

- Hamiltonian
$$H = \int d^3x((\partial_0\phi^+)(\partial_0\phi) + \nabla\phi^+ \cdot \nabla\phi + m^2\phi^+\phi)$$
- pęd
$$\vec{P} = \int d^3x(\pi_\phi \vec{\nabla}\phi + h.c.)$$
- wykorzystaj kanoniczne reguły komutacji i pokaż, że $[H, \vec{P}] = 0$
- wyraź, $\vec{P}$ przez przez operatory kreacji i anihilacji

3.3 Sprawdzić, że w obrazie oddziaływania, w którym ewolucja czasowa operatorów $A_I(t)$ jest opisana przez swobodny hamiltonian H_0 zgodnie z

$$A_I(t) = e^{iH_0t}Ae^{-iH_0t},$$

operatory pola skalarnego $\phi_I(x),\ \pi_I(x)$ spełniają te same relacje komutacyjne, co w obrazie Schrödinger-a, tzn.

$$[\phi_I(\vec{x},t), \pi_I(\vec{y},t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}).$$

3.4 Dla teorii zespolonego pola skalarnego

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2$$

wykaż, że:

(a). o ile zachodza klasyczne r.r. to prąd $j^\mu = -ig(\phi^*\partial^\mu\phi - \partial^\mu\phi^*\phi)$ jest zachowany tj. $\partial_\mu j^\mu = 0$ oraz ładunek $Q = -ig\int d^3x(\phi^*\partial_0\phi - \partial_0\phi^*\,\phi)$ jest stały w czasie tj. $\dot{Q} = 0$

W teorii kwantowej (wykorzystaj kanoniczne reguły komutacji)

(b). pole ϕ ma ładunek g tj. $[Q, \phi(x)] = g\phi(x)$

(c). ładunek $Q = \int d^3xj^0$ nie zależy od czasu tj. $[H, Q] = 0$.

Dla kwantowej teorii swobodnej $\lambda = 0$

(d). wyraź Q przez operatory kreacji i anihilacji

(e). policz $[H, Q] = 0$ dla H i Q wyrażonych przez operatory kreacji i anihilacji

3.5 Pokaż, że:

$$e^{-iH_0 t}a^+(k)e^{iH_0 t} = e^{-i\omega_k t}a^+(k)$$

Wskazówka: oznaczamy $a^+(k,t) \equiv e^{-iH_0 t}a^+(k)e^{iH_0 t}$. 1) Pokaż,że $[a(k,t), a^+(k',t)] = \tilde{\delta}(k-k')$. 2) ułóż r. różniczkowe: $i\partial_t a^+(k,t) = [H_0, a^+(k,t)]$, 3) wyraź H_0 przez $a(k,t), a^+(k,t)$ 4) policz $[H_0, a^+(k,t)]$ 5. rozwiąż r. różniczkowe.

3.6 Wykonać zadanie poprzednie w przypadku teorii z lokalna symetria cechowanie U(1) (tj. gdy formalnie podstawimy $\partial_\mu \to D_\mu$).

3.7 Różniczkując $< 0|T\phi(x)\phi(x')|0 >$ oraz korzystając z reguł komutacji miedzy polem oraz pędem pola pokaż, że

$$(\partial^2 + m^2) < 0|T\phi(x)\phi(x')|0 >= -i\delta^{(4)}(x-x')$$

Wskaz: pamiętaj o iloczynie chronologicznym oraz użyj $\partial_t \theta(t-t') = \delta(t-t')$

4 Diagramy Feynmana

4.1 Dla modelu zespolonych pól skalarnych $\phi_i,\ (i = 1,2)$ o masach m_i z oddziaływaniem

$$\mathcal{L}_I = -\lambda|\phi_1|^2|\phi_2|^2,$$

posługując się formalizmem kwantowej teorii pola, policz amplitudę przejscia czastki i anty-czastki typu 1 na czastke i anty-czastke typu 2.

$$1 + \bar{1} \to 2 + \bar{2}$$

4.2 Dla modelu zespolonego pola skalarnego ψ o masie m oddzialyjacego z rzeczywistym polem skalarnym ϕ o masie $M > 2m$

$$\mathcal{L}_I = -\lambda\phi|\psi|^2,$$

oblicz w wiodącym rzędzie rachunku zaburzeń:

(a). amplitude rozpadu czastki pola ϕ na czastke ψ i anty-czastke $\overline{\psi}$.

$$\phi \to \psi + \overline{\psi}$$

Dlaczego dla $M < 2m$ amplituda ta znika.

oraz amplitudy rozpraszania (oznaczenia j.w.)

(b). $2\psi \to 2\psi$

(c). $\psi + \phi \to \psi + \phi$

(d). $2\phi \to \psi + \overline{\psi}$

4.3 Dla modelu zespolonego pola skalarnego ψ o masie m oddzialyjacego z rzeczywistym polem skalarnym ϕ o masie M i oddziaływaniu

$$\mathcal{L}_I = -\lambda_1 \phi |\psi|^2 - \frac{\lambda_2}{3!}\phi^3,$$

narysuj wszystkie diagramy Feynmana dla procesów z poprzedniego zadania

4.4 Pewien model teorii cząstek zawiera dwa zespolone pola skalarne ϕ_1, ϕ_2 o masach, odpowiednio, m_1, m_2 i ładunkach $Q_1 = 1, Q_2 = 2$ względem pewnej globalnej grupy symetrii U(1).
(a) Skonstruuj najogólniejszy lagrangian lorentzowsko i U(1) niezmienniczy z kanonicznymi członami kinetycznymi i oddziaływaniami do rzedu $O(\phi^4)$.

Narysuj wszystkie drzewowe diagramy Feynmana dla następujących procesów rozpraszania
(b) $1 + 1 \to 1 + 1$,
(c) $2 + \bar{2} \to 1 + \bar{1}$.

Wskazówka: Grupa U(1) działa na te pola w następujący sposób
$\phi_1 \to \phi_1' = e^{i\alpha}\phi_1, \quad \phi_2 \to \phi_1' = e^{2i\alpha}\phi_2.$

4.5 Dla teorii:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi + \frac{1}{2}\,\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2|\psi|^2 - M^2\phi^2 - \lambda|\psi|^2\phi, \quad \psi \in \mathbb{C},\ \phi \in \mathbb{R}$$

(a)Posługując się regułami kanonicznego kwantowania wyprowadź wzór na amplitudę rozpraszania e-lastycznego anty-cząstki pola ψ i cząstki pola ϕ.
(b)Przedyskutuj jakie drzewowe procesy mogą zachodzić między kwantami pól skalarnych $\psi,\ \phi$ w rzędzie λ oraz λ^2.

4.6 Pewien model teorii cząstek zawiera dwa pola zespolone (ϕ_1, ϕ_2) o ładunkach U(1) $(Q_1 = 1,\ Q_2 = 2)$ i masach równych odpowiednio (m_1, m_2). Skonstruuj najogólniejszy Lagrangian Lorentzowsko i U(1) niezminniczy z kanonicznymi członami kinetycznymi i oddziływaniami do rzędu $O(\phi^4)$. Narysuj wszystkie drzewowe diagramy Feynmana na następujące procesy rozpraszania

(a) $1 + 1 \rightarrow\ 1 + 1$,

(b) $2 + \overline{2} \rightarrow\ 1 + \overline{1}$

Wskazowka: Grupa U(1) działa na te pola w następujący sposób $\phi_1 \rightarrow\ e^{i\alpha}\phi_1,\ \phi_2 \rightarrow\ e^{2i\alpha}\phi_2$.

5 Model Standardowy (MS)

Skład kwarkowy mezonów: $K^- = \bar{u}s,\ \pi^- = \bar{u}d,\ \pi^0 = (\bar{u}u - \bar{d}d)$.

Masy: $m_{\pi^-} = 140\, MeV,\ m_{\pi^0} = 135\, MeV,\ m_{K^-} = 494\, MeV,\ m_{K^0} = 498\, MeV,\ m_e = 0.5\, MeV,\ m_\mu = 100\, MeV,\ m_\tau = 1.8\, GeV.$

5.1 W MS policzyć masę pola Higgsa H. Potencjał dla dubletu pól skalarnych wynosi $V(\phi) = \lambda(\phi^+\phi - \frac{v^2}{2})^2$ a pole Higgsa zdefiniowne jest przez $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix}$

5.2 Narysuj diagramy Feynmana najniższego rzędu prowadzące do rozpadów:

$(a)\ K^- \rightarrow\ l + \bar{\nu}_l \quad (b)\ K^- \rightarrow\ l + \bar{\nu}_l + \pi^0 \quad (c)\ K^- \rightarrow\ \pi^- + \pi^0 \quad (d)\ \pi^- \rightarrow\ l + \bar{\nu}_l \quad (e)\ \pi^- \rightarrow\ l + \bar{\nu}_l + \pi^0$

gdzie l jest jednym z leptonów. Które z leptonów mogą być wyprodukowane w takich procesach.

5.3 W Lagrangianie MS policzyć oddziływania sprzężenia pól

(a) $\bar{e}\, eZ$, (b) $\bar{\nu}_e\, \nu_e Z$, (c) $\bar{e}\, \nu_e W$, (f) $W^+\bar{u}d$, (g) $W^+\bar{u}s$. (h) $H^2 Z_\mu$ (i) $H\bar{u}u$

5.4 A. Narysuj diagramy Feynmana najniższego rzędu prowadzące do procesów

(a). $e + \nu_\mu \rightarrow\ e + \nu_\mu$

(b). $e + \nu_e \rightarrow\ e + \nu_e$

(c). $e + \nu_\mu \rightarrow\ \mu + \nu_e$

Odpowiedź uzasadnij wypisując odpowiednie człony oddziaływania.