

Elementy Modelu Standardowego

Funkcja Lagrange'a

Model Standardowy, który opisuje wszystkie oddziaływania (poza grawitacyjnym) pomiędzy cząstkami elementarnymi, opiera się na kwantowej teorii pola.

Podstawowym elementem tej teorii, który w istocie decyduje o dynamice cząstek jest funkcja Lagrange'a (*lagranżjan*).

Przypomnienie z mechaniki klasycznej

Równanie ruchu cząstki w mechanice Newtona: $\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$

Jeśli siły są zachowawcze, to można wprowadzić energię potencjalną $\vec{F} = -\nabla U$

Lagranżjan to funkcja uogólnionych współrzędnych q_i i ich pochodnych czasowych $\dot{q}_i$, wyrażająca różnicę energii kinetycznej i potencjalnej:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = T - U$$

→ Znając lagranżjan możemy wyprowadzić równania ruchu układu stosując równanie Eulera–Lagrange'a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Przykład : ruch jednej cząstki w polu energii potencjalnej $U(\vec{r})$

$$L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 - U(\vec{r}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z)$$

np. dla składowej x mamy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m \dot{x} = m v_x \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} m \frac{dv_x}{dt} = F_x$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial U}{\partial x} = F_x$$

Relatywistyczna teoria pola

W QFT podstawowymi obiektami są pola, których wzbudzenia interpretujemy jako cząstki. Pola te są ciągłymi funkcjami współrzędnych czasoprzestrzennych x^μ

➔ Przez analogię do mechaniki klasycznej wprowadza się gęstość lagranżjanu, której niezależnymi współzrędnymi są pola i ich pochodne:

$$L(q_i, \dot{q}_i) \rightarrow \mathcal{L}(\phi_i(x^\mu), \partial_\mu \phi_i) \quad L = \int \mathcal{L} d^3x$$

$$x^\mu = (x^0, \vec{x}) = (ct, x, y, z) \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right)$$

$$x_\mu = (x^0, -\vec{x}) = (ct, -x, -y, -z) \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right)$$

- Podanie gęstości lagranżjanu praktycznie określa teorię dla zadanych pól. Wynikają z niego wszystkie reguły rachunkowe, np. reguły obliczania diagramów Feynmana. Podobnie jak w mechanice klasycznej, rachunek minimalnego (stacjonarnego) działania prowadzi do równań typu Eulera–Lagrange’a:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad \text{równania pola}$$

Przykład 1 : **swobodna** (nie oddziałująca) cząstka skalarna (spin 0) o masie m opisana jest przez pole skalarne ϕ i gęstość lagranżjanu:

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2} \underbrace{(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)}_{(\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_1 \phi \partial_1 \phi - \partial_2 \phi \partial_2 \phi - \partial_3 \phi \partial_3 \phi)} - \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi = \partial^0 \phi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_1 \phi)} = -\partial_1 \phi = \partial^1 \phi, \dots$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi \quad \text{równanie Kleina Gordona}$$

Przykład 2 : swobodna cząstka Diraca o spinie 1/2

Cząstka Diraca (elektron, kwark) opisana jest przez funkcję (pole) o czterech zespolonych składnikach (bispinor):

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Lagranżjan dla **cząstki swobodnej** (brak oddziaływań):

$$\mathcal{L}_D = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi$$

Wyjaśnienia: γ^μ to cztery macierze 4 x 4 o stałych wyrazach (nie czterowektor!) w reprezentacji Diraca – Pauliego:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{– tu 0 i 1 oznaczają odpowiednio macierz zerową i jednostkową 2 x 2, a } \sigma^i \text{ to macierze Pauliego}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sprzężenie Diraca: } \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^*, \psi_2^*, -\psi_3^*, -\psi_4^*)$$

$$\mathcal{L}_D = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi \qquad \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0$$

Jako niezależne pola można wybrać ψ i $\bar{\psi}$

Stosując równania pola do funkcji $\bar{\psi}$ dostajemy:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = i(\hbar c) \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \psi \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0$$

$$\Rightarrow i(\hbar c) \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \psi = 0$$

$$\Rightarrow i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \left(\frac{mc}{\hbar} \right) \psi = 0 \qquad \text{równanie Diraca}$$

W zapisie rozwiniętym:

$$i\gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \left(\frac{mc}{\hbar} \right) \psi$$

Stosując równania pola do ψ dostaniemy sprzężoną postać równania Diraca:

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar} \right) \bar{\psi} = 0$$

Przykład 3 : swobodna cząstka wektorowa o spinie 1 (np. foton)

Jej pole jest opisane przez czterowektor A^μ i lagranżjan:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

Wprowadzając oznaczenie $F^{\mu\nu} \equiv (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$
możemy napisać zgrabniej:

$$\mathcal{L}_{\text{Proca}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu A_\nu$$

Wynikają z tego równania pola: $\partial_\mu F^{\mu\nu} + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 A^\nu = 0$

→ W przypadku pola e-m (fotony, $m = 0$) tradycyjnie zapisujemy $A^\mu = (\phi, \vec{A})$

mamy do tego: $\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi$
 $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ $\Rightarrow$ $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2) \Rightarrow \boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0} \quad \text{równania Maxwella w próżni}$$

Symetria cechowania

Jedną z głównych idei Modelu Standardowego jest tzw. lokalna symetria cechowania (*local gauge invariance*). Idea ta pozwala w bardzo elegancki sposób wprowadzić do teorii oddziaływania między cząstkami. Zobaczmy najpierw jak to funkcjonuje w najprostszym przypadku elektrodynamiki.

Przypomnijmy lagranżjan Diraca (cząstka swobodna):

$$\mathcal{L}_D = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi$$

Łatwo zobaczyć, że jest on niezmienniczy względem transformacji:

$$\psi \rightarrow e^{i\theta} \psi \quad - \text{globalna zmiana fazy}$$

Mamy bowiem $\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\theta} \bar{\psi}$, więc w wyrażeniach $\bar{\psi} \psi$ czynniki fazowe się kasują.

- Żądamy teraz (postulat teorii) czegoś znacznie mocniejszego – aby lagranżjan był niezmienniczy względem transformacji, w której zmiana fazy może być inna w każdym punkcie czasoprzestrzeni!

$$\psi \rightarrow e^{i\theta(x)} \psi \quad - \text{lokalna zmiana fazy}$$

Niezmienniczość względem tej transformacji jest właśnie lokalną symetrią cechowania

Napotykaamy jednak na trudność, bo operacja różniczkowania tworzy dodatkową funkcję x , która łamie symetrię.

Najpierw zmieniamy nieco zapis, chcemy aby: $\psi \rightarrow e^{iq\lambda(x)/\hbar c} \psi = \psi'$ (♦)

$$\Rightarrow \partial_\mu \psi' = e^{iq\lambda(x)/\hbar c} \partial_\mu \psi + \frac{iq}{\hbar c} \partial_\mu \lambda(x) e^{iq\lambda(x)/\hbar c} \psi \quad q - \text{ładunek cząstki Diraca}$$

$$\text{a zatem } \mathcal{L}' = i(\hbar c) \bar{\psi}' \gamma^\mu \partial_\mu \psi' - (mc^2) \bar{\psi}' \psi' = \mathcal{L} - q \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \lambda(x) \psi$$

Aby odzyskać niezmienniczość musimy coś dodać: pole wektorowe, które przy transformacji cechowania będzie się tak zmieniać, żeby ten dodatkowy wyraz zniknął

Zmianę tę wyrażamy przez podstawienie: $\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L} &= i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \left(\partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu \right) \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi \\ &= i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi - q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \end{aligned}$$

Wyrażenie to będzie niezmiennicze względem (♦), jeśli jednocześnie nowe pole zmieni się zgodnie z:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda(x) \quad \text{a to przecież wygląda jak znana transformacja cechowania pól elektromagnetycznych!}$$

To jeszcze nie koniec. Dodaliśmy do teorii nowe pole wektorowe, musimy więc jeszcze dodać wyraz „swobodny” tego pola. Odpowiedni jest tu lagranżjan Proca, ale musimy położyć w nim $m = 0$ aby zachować niezmienniczość względem (♦). To nowe pole A to potencjały elektrodynamiczne reprezentujące foton!

→ Ostatecznie dostajemy pełny lagranżjan elektrodynamiki kwantowej:

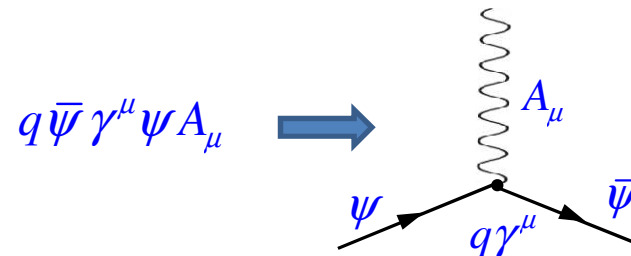
$$\mathcal{L}_{QED} = \underbrace{i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi}_{\text{swobodny elektron}} - \underbrace{\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}_{\text{swobodny foton}} - \underbrace{q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu}_{\text{oddziaływanie foton - elektron}} \quad \text{QED}$$

→ Równania Eulera – Lagrange’a dla pól A (dwa ostatnie wyrazy) dadzą nam:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{gdzie} \quad j^\mu = q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \text{ est czterowektorem prądu}$$

Sa to **równania Maxwella** w obecności źródeł !

→ Człon oddziaływania determinuje elementarny diagram Feynmana dla oddziaływania fermion-foton



Podsumujmy

- Wyszliśmy od lagranżjanu cząstki swobodnej (elektronu) i zażądaliśmy lokalnej symetrii cechowania, w tym przypadku niezmienniczości względem lokalnej zmiany fazy:

$$\psi \rightarrow S\psi = e^{iq\lambda(x)/\hbar c} \psi \quad - \text{unitarna operacja, która tworzy grupę } \mathbf{U(1)}$$

- Wymusiło to dodanie nowego pola – *pola cechowania* A_μ – które reprezentuje cząstkę – *bozon cechowania* – oddziałujący z elektronem. Cząstka ta (foton) musiała być bezmasowa!

- Pole cechowania musiało być przy tym niezmiennicze względem transformacji:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda(x)$$

- Pole cechowania wprowadziliśmy stosując podstawienie:

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i \frac{q}{\hbar c} A_\mu$$

- a postać transformacji dla pól cechowania wynikała z żądania, aby:

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow \mathcal{D}_\mu S\psi = S \mathcal{D}_\mu \psi$$

➔ W wyniku dostaliśmy pełny opis oddziaływania między elektronami i fotonami!

Chromodynamika kwantowa (QCD)

Kwark jest opisany równaniem Diraca, ale wiemy, że występuje w trzech „kolorach”. Dla każdego koloru mamy więc osobne równanie Diraca. Możemy uprościć zapis opisując kwark przez obiekt składający się z trzech bispinorów:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_g \\ \psi_b \end{pmatrix} \quad \bar{\psi} = (\bar{\psi}_r \quad \bar{\psi}_g \quad \bar{\psi}_b)$$

W tej notacji lagranżjan dla swobodnego kwarku: $\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi$

Obiekt ten jest niezmienniczy względem globalnej transformacji:

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^\dagger$$

– symetria globalna, grupa **U(3)**

gdzie U jest macierzą unitarną 3 x 3 $U^\dagger U = 1$

→ Każdą taką macierz można przedstawić jako: $U = e^{iH}$, $H^\dagger = H$

a każdą macierz hermitowską 3 x 3 jako: $H = \theta \cdot \mathbf{1} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}$

gdzie **1** to macierz jednostkowa 3 x 3, **a** to zestaw ośmiu współczynników,

a **T** to osiem macierzy 3 x 3 – tzw. generatorów grupy SU(3) (macierze Gell-Mana)

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = a_a T_a = a_1 T_1 + a_2 T_2 + \dots + a_8 T_8$$

- Przez analogię do QED żądamy teraz, aby lagranżjan dla kwarku był niezmienniczy ze względu na transformację lokalną:

$$U = \exp\left[i \frac{q}{\hbar c} \lambda(x) \mathbf{1}\right] \exp\left(i \frac{g_s}{\hbar c} \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{T}\right) \quad g_s - \text{stała sprzężenia silnego}$$

grupa U(1) – to nam da
oddziaływanie E-M

grupa SU(3) – to nam określi
oddziaływanie silne

Skupiamy się na transformacji $\psi \rightarrow S\psi = \psi' = \exp\left(i \frac{g_s}{\hbar c} \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{T}\right) \psi$

- ➔ Aby zapewnić niezmienniczość lagranżjanu musimy wprowadzić 8 nowych pól wektorowych bezmasowych (gluony!) poprzez podstawienie:

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i \frac{g_s}{\hbar c} T_a G_\mu^a, \quad a = 1, 2, \dots, 8$$

- ➔ Wymaganie by $\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow S \mathcal{D}_\mu \psi$ daje reguły transformacji dla pól cechowania:

$$G_\mu^k \rightarrow G_\mu^{k'} = G_\mu^k - \partial_\mu \alpha_k - g_s f_{ijk} \alpha_i G_\mu^j \quad [T_i, T_j] = i f_{ijk} T_k$$

ostatni wyraz pojawia się ponieważ macierze T nie komutują ze sobą, a współczynniki f_{ijk} to tzw. stałe struktury grupy SU(3).

- ➔ Nieabelowa teoria z cechowaniem

mamy więc lagranżjan:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi \\ &= i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi - (g_s \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi) G_\mu^a\end{aligned}$$

gdy dodamy jeszcze wyraz dla swobodnych gluonów, otrzymamy kompletny lagranżjan chromodynamiki:

$$\mathcal{L} = i(\hbar c) \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (mc^2) \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} \mathbf{G}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{G}_{\mu\nu} - (g_s \bar{\psi} \gamma^\mu T_a \psi) G_\mu^a \quad \text{QCD}$$

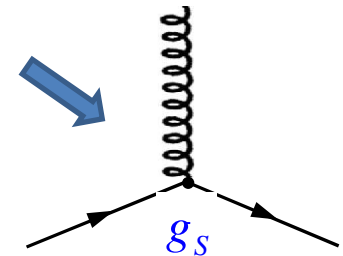
swobodny kwark

swobodne gluony

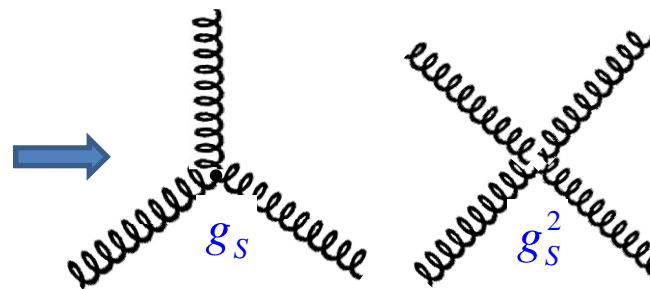
oddziaływanie
kwark - gluony

→ ale $G_i^{\mu\nu} = \partial^\mu G_i^\nu - \partial^\nu G_i^\mu - g_s f_{ijk} G_j^\mu G_k^\nu$

gluony oddziałują ze sobą!



w członie $\mathbf{G}^{\mu\nu} \cdot \mathbf{G}_{\mu\nu}$ pojawią się iloczyny trzech i czterech pól G , które prowadzą do diagramów



Oddziaływania słabe

Teorie oddziaływań słabych konstruuje się analogicznie do QCD, jest to też nieabelowa teoria z cechowaniem. Obiektem, który podlega transformacji cechowania są dublety:

$$\chi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix} \quad \text{grupa cechowania: } \mathbf{SU(2)}$$

- Grupa SU(2) ma trzy generatory (macierze Pauliego), co oznacza, że występują trzy pola cechowania → trzy bozony cechowania (dwa naładowane i jeden neutralny).
- ➔ Pojawia się tu jednak kilka komplikacji.
 - w dubletach występują tylko cząstki lewoskrętne (łamanie parzystości!)
 - oddziaływanie łączy się z elektromagnetycznym w jedną teorię elektroślabą – odpowiednia grupa symetrii cechowania: $\mathbf{SU(2)_L \otimes U(1)}$,
 - obserwowany foton i bozon Z są kombinacjami liniowymi neutralnego bozonu z grupy $\mathbf{SU(2)}$ i bozonu z grupy $\mathbf{U(1)}$.
 - wreszcie najpoważniejsza trudność: wiemy, że bozony przenoszące oddziaływanie słabe nie są bezmasowe!
- Odkrycie mechanizmu Higgsa rozwiązało ten ostatni problem.

Mechanizm Higgsa

1. Oddziałujące pole skalarne

Przypomnijmy najprostszy przypadek: rzeczywiste pole skalarne. Lagranżjan dla pola swobodnego (str. 422):

$$\mathcal{L}_S = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \phi^2 \quad \rightarrow \text{człon masowy: pole do kwadratu}$$

Rozważmy teraz następujący lagranżjan:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 \phi^4$$

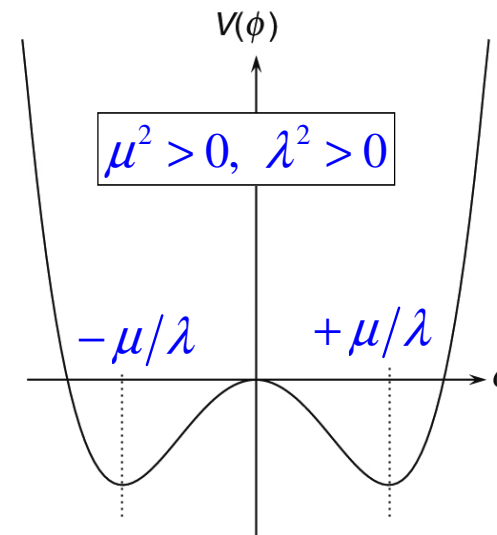
gdzie tu jest człon masowy? Wyraz z ϕ^2 odpowiada masie urojonej!

Energia potencjalna w tym przypadku:

$$U = -\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda^2 \phi^4$$

ma minimum nie dla $\phi = 0$

lecz dla $\phi = \pm \frac{\mu}{\lambda}$!



- W tym przypadku najniższa energia pola (nazywamy to stanem próżni) odpowiada niezerowej wartości pola! Potencjał jest symetryczny, ale stan próżni łamie tę symetrię – zachodzi tu *spontaniczne łamanie symetrii*.
- ➔ Rachunek perturbacyjny (diagramy Feynmana) odpowiada badaniu małych fluktuacji wokół stanu próżni. Załóżmy, że układ wybrał stan $\phi = +\mu/\lambda$. Zmieniamy oznaczenia tak, by wyrazić lagranżjan przez odchylenia od tego stanu:

$$\phi \equiv \eta + \mu/\lambda$$

Lagranżjan wyrażony przez pole η przyjmuje teraz postać (proszę sprawdzić!):

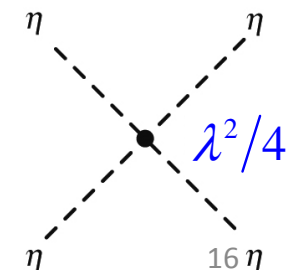
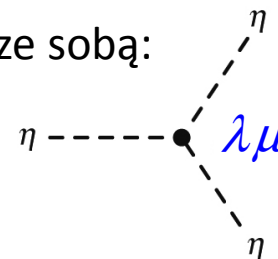
$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}\mu^2 \left(\eta + \frac{\mu}{\lambda}\right)^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 \left(\eta + \frac{\mu}{\lambda}\right)^4 \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta)}_{\text{część kinetyczna}} - \underbrace{\mu^2 \eta^2}_{\text{człon masowy}} - \underbrace{\mu\lambda\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda^2\eta^4}_{\text{oddziaływania}} + \underbrace{\frac{\mu^4}{4\lambda^4}}_{\text{stała}}\end{aligned}$$

(wyraz stały nie ma żadnych konsekwencji fizycznych)

- ➔ Mamy więc pole skalarne, którego cząstki mają masę:

$$\mu^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \Rightarrow m = \frac{\sqrt{2}\hbar}{c} \mu$$

i oddziałują ze sobą:



2. Pole skalarne zespolone

Znacznie ciekawsza sytuacja występuje wtedy, gdy spontanicznie łamana jest symetria ciągła. Rozważmy pole skalarne, ale zespolone (dwie składowe):

$$\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2 \quad \Rightarrow \quad \phi^* \phi = \phi_1^2 + \phi_2^2$$

i lagrangian o takiej postaci:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}\mu^2(\phi^* \phi) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^* \phi)^2$$

➔ Widać, że jest on niezmienniczy względem operacji

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta} \phi \quad - \text{globalna symetria } \mathbf{U(1)} !$$

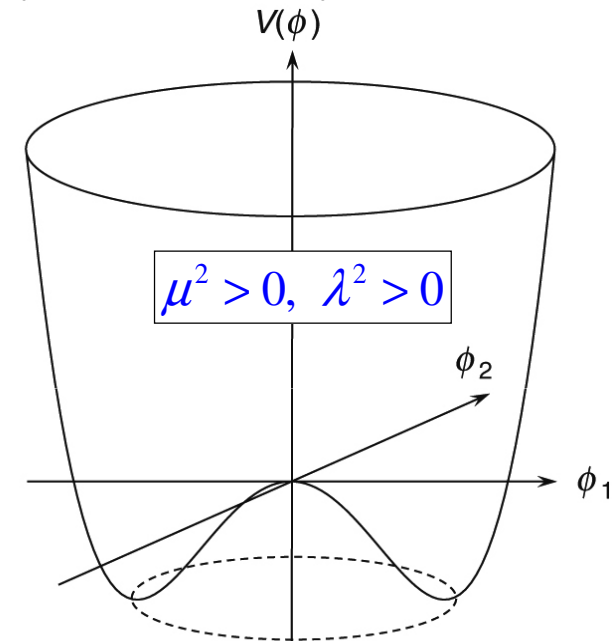
Wyrażamy ten lagrangian przez pola składowe:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2) + \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda^2(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2$$

➔ Ponownie widzimy, że stan próżni nie odpowiada zerowym wartościom pól!

Punkty o najmniejszej energii potencjalnej tworzą okrąg: $\phi_{1,\min}^2 + \phi_{2,\min}^2 = \mu^2 / \lambda^2$

Układ spontanicznie wybierze jeden z tych punktów jako stan próżni łamiąc symetrię!

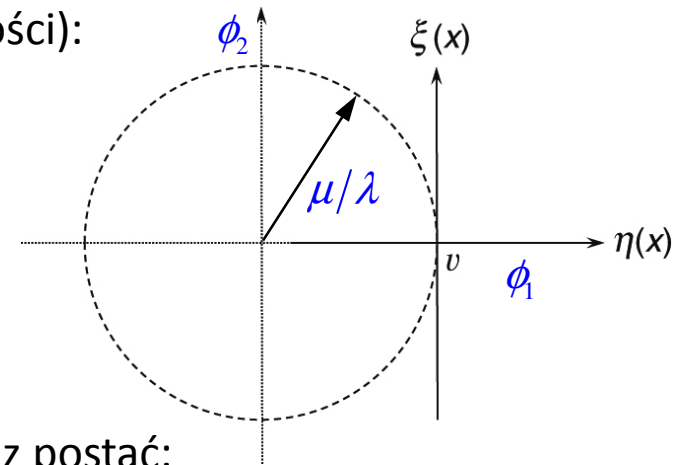


Wybieramy jeden z tych punktów (nie tracąc ogólności):

$$\phi_{1,\min} = \mu/\lambda, \quad \phi_{2,\min} = 0$$

i badamy odchylenia od tego punktu wprowadzając oznaczenia:

$$\eta \equiv \phi_1 - \mu/\lambda, \quad \xi \equiv \phi_2$$

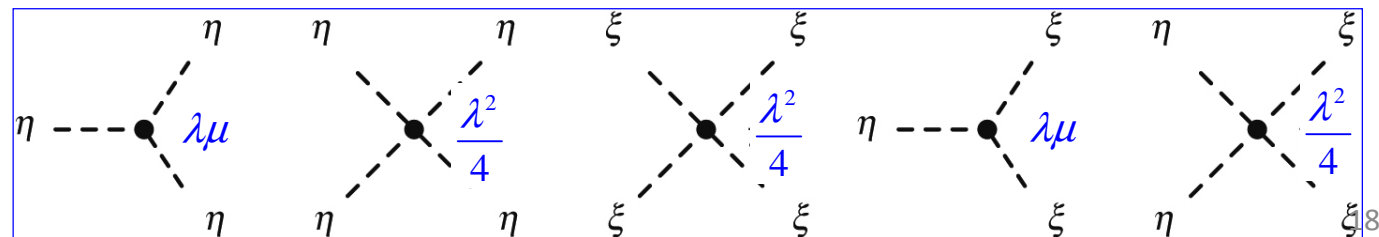


Lagrangian wyrażony przez pola η , ξ przyjmuje teraz postać:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + \frac{1}{2}\mu^2 \left[\left(\eta + \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 + \xi^2 \right] - \frac{1}{4}\lambda^2 \left[\left(\eta + \frac{\mu}{\lambda} \right)^2 + \xi^2 \right]^2$$

która po elementarnych przekształceniach (proszę sprawdzić!) prowadzi do:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \right]}_{\text{pole } \eta \text{ z masą}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)}_{\text{pole } \xi \text{ bezmasowe „bozon Goldstone’a”}} - \underbrace{\left[\lambda\mu(\eta^3 + \eta\xi^2) + \frac{\lambda^2}{4}(\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2\xi^2) \right]}_{\text{oddziaływania}} + \underbrace{\frac{\mu^4}{4\lambda^2}}_{\text{stała}}$$



3. Łamanie symetrii w teorii cechowania

Jeszcze ciekawsze rzeczy dzieją się, gdy spontaniczne łamanie symetrii zachodzi dla pól z lokalną symetrią cechowania. W poprzednim przykładzie mieliśmy pole skalarne (zespolone) z globalną symetrią **U(1)**. Zażądamy teraz, aby symetria ta była lokalna. Jest to najprostszy model, na którym można prześledzić działanie mechanizmu Higgsa.

Mamy więc lagrangian zespolonego pola skalarnego:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi^* \phi) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi^* \phi)^2 \quad \phi \equiv \phi_1 + i\phi_2$$

chcemy, aby był niezmienniczy względem lokalnej transformacji:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{ig\lambda(x)/\hbar c} \phi \quad - \text{lokalna symetria } \mathbf{U(1)} !$$

Postępujemy tak, jak poprzednio: dodajemy bezmasowe (!) wektorowe pole cechowania z jego odpowiednią transformacją :

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + i \frac{g}{\hbar c} B_\mu \quad B_\mu \rightarrow B'_\mu = B_\mu - \partial_\mu \lambda(x)$$

oraz dodajemy część kinetyczną pola **B**: $-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ gdzie $F^{\mu\nu} \equiv (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu)$

→ Lagrangian przybiera postać:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\partial_\mu - i \frac{g}{\hbar c} B_\mu \right) \phi^* \right] \left[\left(\partial^\mu + i \frac{g}{\hbar c} B^\mu \right) \phi \right] - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \mu^2 (\phi^* \phi) - \frac{1}{4} \lambda^2 (\phi^* \phi)^2$$

Podobnie jak poprzednio, stan próżni, to punkt na okręgu $\phi_{1,\min}^2 + \phi_{2,\min}^2 = \mu^2 / \lambda^2$

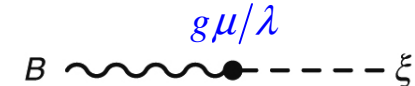
Wybieramy ponownie: $\phi_{1,\min} = \mu / \lambda$, $\phi_{2,\min} = 0$

i wprowadzamy $\eta \equiv \phi_1 - \mu / \lambda$, $\xi \equiv \phi_2$

→ Rachunek, teraz bardziej żmudny (ale ciągle elementarny), prowadzi do:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \right] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi) (\partial^\mu \xi) + \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{g\mu}{\hbar c \lambda} \right)^2 B_\mu B^\mu \right] \\ & \text{pole } \eta \text{ z masą} \quad \text{pole } \xi \text{ bez masy} \quad \text{pole cechowania uzyskało masę!} \\ & + \left[\frac{g}{\hbar c} B_\mu (\eta \partial^\mu \xi - \xi \partial^\mu \eta) + \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{g}{\hbar c} \right)^2 \eta B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\hbar c} \right)^2 (\eta^2 + \xi^2) B_\mu B^\mu + \frac{g}{\hbar c} \frac{\mu}{\lambda} B_\mu \partial^\mu \xi \right] \\ & \text{oddziaływania pól } \eta, \xi \text{ i } B \\ & - \left[\lambda \mu (\eta^3 + \eta \xi^2) + \frac{\lambda^2}{4} (\eta^4 + \xi^4 + 2\eta^2 \xi^2) \right] + \frac{\mu^4}{4\lambda^2} \\ & \text{tu jak wcześniej: oddziaływania pól } \eta \text{ i } \xi \text{ i wyraz stały} \end{aligned}$$

Ale to nam się
nie podoba!



→ Ostatni krok: wykorzystujemy lokalną symetrię i wybieramy szczególne cechowanie.

$$\begin{aligned}\phi' &= e^{i\theta(x)} \phi = (\cos \theta(x) + i \sin \theta(x)) (\phi_1(x) + i \phi_2(x)) \\ &= [\phi_1(x) \cos \theta(x) - \phi_2(x) \sin \theta(x)] + i [\phi_2(x) \cos \theta(x) + \phi_1(x) \sin \theta(x)]\end{aligned}$$

jeśli wybierzemy $\theta(x)$ tak, aby $\tan \theta(x) = -\phi_2(x)/\phi_1(x)$

to część urojona tożsamościowo znika!

→ W ten sposób eliminujemy z lagrangianu pole ξ !

Pola B zmieniają się odpowiednio, ale postać lagrangianu pozostanie ta sama, jest przecież niezmienniczy!). Jeśli pominiemy nieistotny wyraz stały, to w tym szczególnym cechowaniu dostajemy:

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \right] + \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{g\mu}{\hbar c \lambda} \right)^2 B_\mu B^\mu \right]$$

masywne pole η – bozon Higgsa

masywny bozon cechowania!

$$+ \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{g}{\hbar c} \right)^2 \eta B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\hbar c} \right)^2 \eta^2 B_\mu B^\mu - \lambda \mu \eta^3 - \frac{\lambda^2}{4} \eta^4$$

oddziaływania pól η i B

$$\mathcal{L} = \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 \right] + \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \left(\frac{g\mu}{\hbar c \lambda} \right)^2 B_\mu B^\mu \right]$$

$$+ \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{g}{\hbar c} \right)^2 \eta B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} \left(\frac{g}{\hbar c} \right)^2 \eta^2 B_\mu B^\mu + \lambda \mu \eta^3 + \frac{\lambda^2}{4} \eta^4$$

masa pola η

$$m_\eta = \frac{\sqrt{2}\hbar}{c} \mu$$

$\downarrow$

masa pola B

$$m_B = \frac{g}{c^2} \frac{\mu}{\lambda}$$

- Na początku mieliśmy zespolone pole skalarne (2 składowe) i bezmasowy bozon cechowania (2 stany polaryzacyjne) – razem 2+2 stopnie swobody.
 - Na końcu mamy rzeczywiste pole skalarne (1 składowa) i masowy bozon cechowania (3 stany polaryzacyjne) – razem 1+3 stopnie swobody.
- Bozon cechowania uzyskał 3-ci stopień swobody „zjadając” bozon Goldstone’a (ξ)

3. Higgs w modelu standardowym

W naszym przykładzie mechanizm Higgsa nadał masę bozonowi związanemu z symetrią cechowania $U(1)$. W elektroślabym sektorze Modelu Standardowego, czyli w teorii Weinberga-Salama, mechanizm ten nadaje masy bozonom pochodzącym z grupy cechowania $SU(2)_L \otimes U(1)$.

- W najprostszym, minimalnym modelu, pole Higgsa jest dubletem pól zespolonych, czyli ma 4 składowe. Pojawią się 3 bezmasowe bozony Goldstone'a, które zapewnią 3-cią składową (a więc i masę) trzem bozonom cechowania $W^\pm Z$. Pozostanie jeszcze jedna dodatkowa masywna cząstka – bozon Higgsa.
- Odkrycie cząstki Higgsa przez LHC w 2012 miało ogromne znaczenie – bez niej cała konstrukcja Modelu Standardowego rozpada się w gruzy.
- Pole Higgsa nie tylko nadaje masę bozonom cechowania, ale także generuje masy fermionów (elektronów i kwarków). Teoria przewiduje, że sprzężenie cząstki Higgsa do fermionu jest proporcjonalne do jego masy – ta cecha jest obecnie testowana przez LHC.
- Masy neutrin tak bardzo odbiegają od mas innych fermionów, że podejrzewa się, że generuje je jakiś inny mechanizm.