

Ćwiczenia 1
21.02.2005

1. Sprawdzić czy poniższe przestrzenie spełniają definicję przestrzeni liniowych:
 - (a) Zbiór $\mathbf{R}^3$ z dodawaniem: $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ oraz mnożeniem przez liczbę: $k(x, y, z) = (kx, y, z)$
 - (b) Zbiór $\mathbf{R}^2$ z dodawaniem: $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ oraz mnożeniem przez liczbę: $k(x, y) = (2kx, 2ky)$.
 - (c) Zbiór macierzy postaci $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbf{R}$ ze standardowym dodawaniem i mnożeniem przez liczbę.
2. Czy zbiór liczb rzeczywistych $\mathbf{R}$ z działaniami $\oplus$ oraz $\otimes$ zdefiniowanymi :
 - (a) $x \oplus y \equiv 2x + 2y$ $\alpha \otimes x = \alpha x$,
 - (b) $x \oplus y \equiv 2x + y$ $\alpha \otimes x = \alpha x$ jest przestrzenią wektorową?
3. Sprawdzić liniową niezależność wektorów:
 - (a) $(2, -1, 4)$, $(3, 6, 2)$, $(2, 10, -4)$,
 - (b) $(6, 0, -1)$, $(1, 1, 4)$,
 - (c) $(1, 3, 3)$, $(0, 1, 4)$, $(5, 6, 3)$, $(7, 2, -1)$.
4. Sprawdzić czy poniższe wektory zaczepione w początku układu współrzędnych leżą w jednej płaszczyźnie: $\mathbf{v}_1 = (3, -6, 9)$, $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)$.
5. Zbadać, czy wektory $(3\sqrt{2}, 3)$ oraz $(2, \sqrt{2})$ są liniowo zależne w przestrzeniach:
 - (a) $\mathbf{R}^2$ nad $\mathbf{R}$,
 - (b) $\mathbf{R}^2$ nad $\mathbf{Q}$.
6. W przestrzeni funkcji ciągłych nad $\mathbf{R}$ pokazać, że są liniowo zależne wektory:
 - (a) $f = \exp(x)$, $g = 3 \exp(x)$,
 - (b) $f = \sin^2(x)$, $g = \cos^2(x)$, $h = 5$.
7. W przestrzeni $\mathbf{R}^4$ dane są cztery wektory: $(1, 2, 3, 1)$, $(0, 3, -1, 2)$, $(1, 0, 3, -4)$, $(2, 5, a, -1)$. Znaleźć takie a , aby wektory te były liniowo niezależne.