

1. Niech $V = \text{Lin}\{(1, 2, 1), (2, 4, 4)\}$, a W będzie zbiorem wszystkich rozwiązań równania $2x_1 - x_2 + x_3 = 0$. Wyznaczyć

- (a) $V + W$,
- (b) $V \cap W$,
- (c) $V^\perp$,
- (d) $W^\perp$,
- (e) $V^\perp + W^\perp$.

Otrzymane przestrzenie liniowe przedstawić jako kombinację liniową wektorów. Podać wymiar podprzestrzeni.

2. Udowodnić dla przestrzeni metrycznych „nierówność czworokąta”

$$\rho(x_1, x_4) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \rho(x_3, x_4).$$

3. Jak mogą wyglądać domknięte kule jednostkowe w $\mathbf{R}^2$ z poniższymi metrykami

- (a) metryka euklidesowa,
- (b) metryka miejska,
- (c) metryka węzła kolejowego,
- (d) metryka dyskretna.

4. Niech $a_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$ będzie ciągiem w $\mathbf{R}^2$. Uzasadnić, że ciąg ten jest zbieżny w metryce euklidesowej i miejskiej, ale rozbieżny w metryce węzła kolejowego i dyskretnej.

5. W przestrzeni wektorowej funkcji ciągłych określonych na odcinku $[0, 1]$ zdefiniowano

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Pokazać, że $\|\cdot\|$ jest normą w rozważanej przestrzeni.

6. Pokazać, że jeśli normę zadano za pomocą iloczynu skalarnego $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ to zachodzą równości

- (a) $(x|y) = \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$,
- (b) $\|x + y + z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \|z\|^2 + 2\|x + y\|^2 + 2\|y + z\|^2 + 2\|z + x\|^2$.

7. Pokazać że norma $\|\cdot\|_\infty$ zdefiniowana w zadaniu 5 nie spełnia równości z zadania 6b, więc nie można jej zadać za pomocą iloczynu skalarnego.