Termodynamika i Fizyka Statystyczna R

1. Znaleźć entropię i temperaturę w funkcji energii E i liczby cząstek N w granicy termodynamicznej, dla trojwymiarowego, gazu klasycznych, nierelatywistycznych, nierozróżnialnych atomów o masie m, w nieskończenie wysokim pionowym naczyniu o przekoju A w polu grawitacyjnym g zamkniętym od dołu, stosując zespół mikrokanoniczny. energia pojedynczego atomu $E = p^2/2m + mgz$

$$E = E_k + E_p,\ E_k = \sum_{i=1}^{3N} p_i^2/2m,\ E_p = mg\sum_i z_i$$
$$\int dpdxdydz\delta(\bar{E} - E) = \int dpdxdydz\delta(\bar{E} - E_k - E_p)$$
$$= \int dE'dpdxdydz\delta(E' - E_k)\delta(\bar{E} - E' - E_p) =$$
$$2m\int dE'dpdxdydz\delta(2mE' - 2mE_k)\delta(\bar{E} - E' - E_p) =$$
$$mA^N \int dE's_{3N}(2mE')^{3N/2-1}dz'\delta(\bar{E}/mg - E'/mg - \sum_i z')/mg$$

gdzie $s_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ jest powierzchnią sfery $n-1$ wymiarowej (zanurzonej w n) Pomocnicza całka

$$\int dz\delta(U - \sum_{i=1}^{N} z_i) = U^{N-1}/(N-1)!$$

bo to całka po odcinku $[0, U]$ tak aby suma z_i dawała U, czyli możemy po prostu dowolnie wybrać $N-1$ kolejnych punktów podziału, a następnie zignorować fakt kolejności dzieląc przez permutacje. Mamy

$$A^N \int dE's_{3N}(2mE')^{3N/2-1}dz'(\bar{E}/mg - E'/mg)^{N-1}/g(N-1)! =$$
$$A^N \int dE's_{3N}(E')^{3N/2-1}(\bar{E} - E')^{N-1}(2m)^{3N/2-1}/g(mg)^{N-1}(N-1)!$$
$$= A^N\bar{E}^{5N/2-1}s_{3N}\int duu^{3N/2-1}dz'(1-u)^{N-1}(2m)^{3N/2-1}/g(mg)^{N-1}(N-1)!$$

Pozostaje całka typu

$$\int_0^1 u^{3N/2-1}(1-u)^{N-1} = B(3N/2, N) = \Gamma(3N/2)\Gamma(N)/\Gamma(5N/2)$$

można to też pokazać przez części.

Zatem

$$W = A^N(2\pi)^{3N/2}\Gamma(N)m^{N/2}/g^N\Gamma(5N/2)(N-1!)(2\pi\hbar)^{3N}N!$$
$$= A^N\bar{E}^{5N/2-1}(2\pi)^{3N/2}m^{N/2}/\Gamma(5N/2)((2\pi\hbar)^3 g)^N N!$$
$$S/k\ln W \simeq N\ln[m^{1/2}A/Ng(2\pi)^{3/2}\hbar^3] + 5N/2\ \ln(2\bar{E}/5N) - 7N/2$$

oraz

$$\frac{\partial S}{\partial \bar{E}} = \frac{1}{T} = 2Nk/5\bar{E}$$