

Termodynamika i Fizyka Statystyczna R

Zestaw X: Oscylatory kwantowe

Zadanie 1

Rozważ sieć krystaliczną, o stałej a . Kolektywne drgania sieci modelujemy jako sumę drgań normalnych o częstościach ω_k , gdzie zależność ω_k od k nazywa się związkiem dyspersyjnym. Dla każdego wektora falowego k są dopuszczalne dwie częstości: $\omega_{k,s}$ dla $s = 1, 2$. Energia drgań normalnych po kwantowaniu jest równa $\hbar\omega_{k,s}(n_{k,s} + 1/2)$, gdzie $n_{k,s}$ jest liczbą fononów w modzie k , na gałęzi s . Zachodzi związek $\sum_{k,s} n_{k,s} = 3N$, gdzie N jest liczbą atomów w sieci.

Proszę znaleźć:

- omówić podobieństwo fononów i fotonów
- energię wewnętrzną sieci: U
- określić jakie temperatury są duże, a jakie małe
- ciepło właściwe sieci: c_V w granicach dużej i małej temperatury

Odpowiedź:

- $U = \sum_{k,s} \hbar\omega_{k,s} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_{k,s}} - 1} \right)$
- $c_V = \frac{k_B}{N} \sum_{k,s} \left(\frac{\hbar\omega_{k,s}}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega_{k,s}/(k_B T)}}{(e^{\hbar\omega_{k,s}/(k_B T)} - 1)^2}$
- $c_V \approx 3k_B$ dla $k_B T \gg \hbar\omega_{k,s}$, $c_V \approx 0$ dla $k_B T \ll \hbar\omega_{k,s}$
- $k_B T \gg \hbar\omega_{k,s}$ jest dużą temperaturą, $k_B T \ll \hbar\omega_{k,s}$ jest małą temperaturą

Zadanie 2

Proszę znaleźć ciśnienie gazu fotonowego, korzystając z gazu fotonowego modelowanego układem kwantowych oscylatorów harmonicznym, Wkład od energii zerowej pominać.

Odpowiedź: $p = \frac{1}{3}u$, gdzie u jest gęstością energii gazu fotonowego.

Zadanie 3

Rozważmy energię drgań oscylatora anharmonicznego o częstości ω :

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + x\hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)^2$$

Proszę znaleźć sumę statystyczną tego oscylatora, zakładając, że poprawka anharmoniczna jest mała: $x \ll 1$.

Odpowiedź: $Z = \frac{1}{2 \sinh(\beta\hbar\omega/2)} \left[1 + x\hbar\omega \left(\frac{1}{4 \tanh^2(\beta\hbar\omega/2)} - \frac{1}{8} \right) \right]$