

# Termodynamika i Fizyka Statystyczna R

## Zestaw X: Oscylatory kwantowe

### Zadanie 1

Rozważ sieć krystaliczną, o stałej  $a$ . Kolektywne drgania sieci modelujemy jako sumę drgań normalnych o częstościach  $\omega_k$ , gdzie zależność  $\omega_k$  od  $k$  nazywa się związkem dyspersyjnym. Energia drgań normalnych po kwantowaniu jest równa

$$\hbar\omega_k \left( n_k + \frac{1}{2} \right),$$

gdzie  $n_k$  jest liczbą fononów w modzie  $k$ . Wszystkich modów jest  $3N$ , gdzie  $N$  jest liczbą atomów w sieci, więc zachodzi związek  $\sum_k 1 = 3N$ . Proszę znaleźć:

- omówić podobieństwo fononów i fotonów,
- energię wewnętrzną sieci:  $U$ ,
- określić jakie temperatury są duże, a jakie małe,
- ciepło właściwe sieci:  $c_V$  w granicy wysokiej temperatury.

### Odpowiedź:

- $U = \sum_k \hbar\omega_k \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1} \right)$ .
- $c_V = \frac{k_B}{N} \sum_k \left( \frac{\hbar\omega_k}{k_B T} \right)^2 \frac{e^{\hbar\omega_k/(k_B T)}}{(e^{\hbar\omega_k/(k_B T)} - 1)^2}$ .
- $c_V \simeq 3k_B$  dla  $k_B T \gg \hbar\omega_k$  dla wszystkich modów.
- $k_B T \gg \hbar\omega_k$  jest dużą temperaturą dla danego modu,  $k_B T \ll \hbar\omega_k$  jest temperaturą małą

### Zadanie 2

Proszę znaleźć ciśnienie gazu fotonowego, korzystając z gazu fotonowego modelowanego układem kwantowych oscylatorów harmoniczych. Wkład od energii zerowej pominąć.

### Odpowiedź:

$$p = \frac{1}{3}u,$$

gdzie  $u$  jest gęstością energii gazu fotonowego.

### Zadanie 3

Rozważmy energię drgań oscylatora anharmonicznego o częstości  $\omega$ :

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + x\hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)^2.$$

Proszę znaleźć sumę statystyczną tego oscylatora, zakładając, że poprawka anharmoniczna jest mała:

$$x \ll 1.$$

### Odpowiedź:

$$Z \simeq \frac{1}{2 \sinh(\beta\hbar\omega/2)} \left[ 1 - \beta x \hbar\omega \left( \frac{1}{2} \coth^2(\beta\hbar\omega/2) - \frac{1}{4} \right) \right].$$