1 Transformata Fouriera

1.1 Wstep

Wiele zjawisk przyrodniczych - np. akustycznych i optycznych - ma charakter okresowy. Wiadomo np., ze dzwiek muzyczny sklada sie z regularnych drgan, czesciowo z tonu podstawowego n, a czesciowo z alikwotow (przytonow) o czestotliwosciach $2n$, $3n$, $\cdots$ Stosunek natezenia tonu podstawowego do natezenia alikwotow decyduje o wrazeniu, jakie wywoluje na nas dzwiek.

Co sie dzieje przy przekształcaniu muzyki? W oscylatorze elektronicznym generuje sie prad o natezeniu zaleznym od czasu t zgodnie z wyrazeniem

$$r \sin(\omega t + v) \tag{1}$$

gdzie r nazywa sie *amplituda* drgan, ω - *czestotliwoscia katowa*, a v jest stala okreslajaca stan w chwili $t = 0$.

W glosniku zmiany pradu sa przekształcane na zmiany cisnienia powietrza, opisane - w idealnych okolicznosciach ta sama funkcja. W praktyce jednak pojawiaja sie zawsze pewne znieksztalcenia - wystepuja alikwoty. Alikwoty rzedu $k-1$ wnosza wklad postaci $r_k \sin(k\omega t + v_k)$. Zmiany cisnienia powietrza odczuwane uchem mozna wobec tego opisac suma postaci

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k \sin(k\omega t + v_k). \tag{2}$$

Powyzesze rozwiniecie mozna wyrazic na wiele rownowaznych sposobow. Przyjmujac, ze $a_k = r_k \sin(v_k)$, $b_k = r_k \cos(v_k)$, wobec wzoru dla sinusa sumy mozemy zapisac, ze

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t), \tag{3}$$

gdzie a_k i b_k sa stalymi rzeczywistymi. Inna, czesto wygodniejsza postac mozna znalezc za pomoca wzorow Eulera

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{4}$$

Jesli

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{5}$$

to otrzymuje sie, ze

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}. \tag{6}$$

Przechodzac z zapisu dyskretnego do ciaglego otrzymuje sie

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \tag{7}$$

Rozwiniecia jak powyzej nazywa sie *szeregami Fouriera*. Szeregi Fouriera sa cennym narzedziem badania zjawisk zaleznych okresowo od czasu (drgan, dzwiekow, swiatla, pradu zmiennego, itd.) lub od polozenia (fal, struktury krystalicznej, itd.). Niekiedy powyzsze metody nazywa sie mianem *analizy spektralnej*.

Powyzej wprowadzilismy opis zjawiska fizycznego w *przestrzeni czasowej*, poprzez wartrosci pewnej wielkosci h jako funkcji od czasu t, tzn $h(t)$. To samo zjawisko mozemy opisac w *przestrzeni czestosci kolowej*, poprzez podanie amplitudy H (w ogolnosci wielkosci zespolonej) jako funkcji czestosci kolowej ω, czyli $H(\omega)$. Opisy te stanowia dwie rozne reprezentacje tej samej funkcji. Mozemy sie miedzy nimi poruszac przy pomocy $transformacjiFouriera$

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i\omega t} dt \\
h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{-i\omega t} d\omega
\end{aligned} \tag{8}
$$

To samo mozna zapisac przy pomocy czestotliwosci f w miejsce czestosci kolowej ω, $f = \frac{\omega}{2\pi}$

$$
\begin{aligned}
H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{2\pi i f t} dt \\
h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{-2\pi i f t} df
\end{aligned} \tag{9}
$$

Oczywiscie t mierzone jest w sekundach zas f w Hertz-ach.

Znajac $h(t)$ mozemy przy pomocy transformaty Fouriera uzyskac rozklad $H(f)$. Dzieki temu mozliwe jest filtrowanie oraz przetwarzanie sygnalow. Na przyklad jestesmy w stanie pozbyc sie z muzyki wkladow o czestotliwosciach odpowiadajacych szumom.

1.2 Dyskretna transformata Fouriera

W wiekszosci przypadkow funkcja $h(t)$ probkowana jest w rownych odstepach czasu. Niech Δ oznacza odstep czasu miedzy kolejnymi probkami, tak ze ciag probkowanych wartosci ma postac

$$
h_k = h(k\Delta) \quad k = \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{10}
$$

Obliczmy teraz transformate Fouriera funkcji znajac skonczona liczbe probkowanych punktow. zalozmy, ze znamy N kolejnych wartosci

$$
h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, N-1 \tag{11}
$$

Dla uproszczenia przyjmijmy, ze N jest parzyste. Jezeli funkcja $f(t)$ jest niezerowa jedynie w skonczonym zakresie czasu wtedy N wybieramy tak, aby zakres punktow pokrywal caly zakres funkcji. Gdy funkcja $f(t)$ jest niezerowa w nieskonczonym zakresie t, wtedy punkty probkujace powinny pokrywac przynajmniej zakres czasu pokrywajacy okres funkcji (zakres "typowego" powtarzajacego sie wygladu funkcji).

Majac N punktow wkladu mozemy wyprodukowac nie wiecej niz N niezaleznych wartosci na wyjsciu. Zamiast probowac obliczyc ciagla transformate Fouriera $H(f)$ (tzn. dla wszystkich wartosci f) w zakresie od $-f_c$ do f_c policzmy jedynie dyskretne wartosci

$$
f_n = \frac{n}{N\Delta}, \quad n = -\frac{N}{2}, \cdots, \frac{N}{2} \tag{12}
$$

Zauwazmy, ze w powyzszym mamy $N+1$ a nie N wartosci n. Okaze sie, ze f_n dla dwoch krancowych wartosci n nie sa niezalezne (sa one rowne).

Tutaj miejsce na mala, ale wazna dygresje. Mianowicie dla dowolnego interwalu Δ istnieje pewna specjalna czestotliwosc f_c, zwana *krytyczna czestotliwoscia Nyquist'a* dana jako

$$
f_c = \frac{1}{2\Delta} \tag{13}
$$

Granice naszego zakresu czestotliwosci, f odpowiadaja dokladnie zakresowi od $-f_c$ do f_c. Nie wchodzac w szczegoly:

- Jezeli ciagla funkcja $h(t)$ probkowana w odstepach Δ, jest ograniczona do czestotliwosci mniejszych w magnitudzie niz f_c (czyli $H(f) = 0$ dla $|f| \geq f_c$) wtedy $h(t)$ jest w pelni zdeterminowana przez probki h_n.

- Jezeli warunek powyzszy nie jest spelniony wtedy jest zle. Czestotliwosci lezace poza zakresem wyznaczonym przez krytyczna czestotliwosc Nyquist'a modyfikuje wyniki otrzymywane dla tych wewnatrz.

Wrocmy do transformaty. Przyblizmy calke (10) dyskretna suma

$$H(f_n) = \int_{-\infty} \infty h(t) e^{2\pi i f_n t} dt \approx \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i f_n t_k} \Delta = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n/N}. \tag{14}$$

gdzie skorzystalismy z rownosci (11) i (12). Ostatnia suma w powyzszym rownaniu nazywana jest *dyskretna transformacja Fouriera* N punktow h_k. Oznaczmy je jako H_n

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{2\pi i k n/N}. \tag{15}$$

Dyskretna transformata Fouriera mapuje N liczb zespolonych (h_k) na N liczb zespolonych (H_n). Nie zalezy ona od zadnego parametru wymoarowego takiego jak skala czasowa Δ. Relacja (14) miedzy dyskretna a ciagla transformata moze byc zapisana jako

$$H(f_n) \approx \Delta H_n \tag{16}$$

gdzie f_n dane jest poprzez (12).

Do tej pory indeks n zmienialismy od $-N/2$ do $N/2$. Mozna jednak latwo zauwazyc, ze (15) jest periodyczne w n z okresem N. Stad $H_{-n} = H_{N-n}$ $n = 1, 2, \cdots$. Majac to w pamieci przyjmuje sie zazwyczaj, ze n zmienia sie od 0 do $N-1$. Wtedy k i n zmieniaja sie w dokladnie tym samym zakresie i mapowanie N liczb w N liczb jest jeszcze lepiej widoczne. Nalezy wtedy pamietac, ze zerowa czestotliwosc odpowiada $n = 0$, dodatnie czestotliwosci $0 < f < f_c$ odpowiadaja wartosciom $1 \leq n \leq N/2 - 1$, zas ujemne $-f_c < f < 0$ $N/2 + 1 \leq n \leq N - 1$. wartosc $n = N/2$ odpowiada obu $f = f_c$ oraz $f = -f_c$.

Wyrazenie na *odwrotna* dyskretna transformacje Fouriera, ktora odtwarza wartosci h_k z H_n ma postac

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n e^{-2\pi i k n/N}. \tag{17}$$

Przy opisie skorzystalismy z dwoch zrodel:

- Numerical Recepies
- Ake Bjorck, Germund Dahlquist, “Metody numeryczne”

Pawel Jankowski i Jakub Narebski