Algebra z geometrią

1 kolokwium - 20 pkt
4× kartkówki - 2 pkt
zalicza 10 pkt - ćwiczenia
egzamin: ustny ≤ 20 pkt, ≤ 20 pkt

Książki:

1) Algebra dla studentów fizyki. P. Urbański
2) Algebra i geometria. S. Zakrzewski

Zbiory zadań:

1) Od liczb zespolonych do kwadryki. Zbiór zadań z algebry z rozwiązaniami.
2) Zbiór zadań z algebry. A. I. Kostrykin

www.fuw.edu.pl/~pkasp

$i^2 = -1$

$(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1+2i-1 = 2i$

$(1+i)^{-1} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2}(1-i)$

Niech $a,b \in \mathbb{R}$, c,d $\quad (a+bi)(c+di) = ac - bd + \cancel{bc}\ i(ad+bc)$

Ciało liczb zespolonych

W zbiorze $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$
Wprowadzimy działanie:

a) dodawania $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$

b) mnożenia $(a,b) \cdot (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

(i) $(1,0) \cdot (c,d) = (c,d)$

(ii) $(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$ — zazwyczaj oznaczamy symbolem i

$\mathbb{R}^2$ z tymi działaniami ozn. $\mathbb{C}$. Elementy $\mathbb{C}$ nazywamy liczbami zespolonymi.

kładąc $i=(0,1)$ $\mathbb{1}=(1,0)$ $\Rightarrow i^2=-\mathbb{1}$

Włożenie $\mathbb{R}$ w $\mathbb{C}$

Każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowujemy liczbę zespoloną $(a,0)$

Od tej pory zamiast $(a,0)\in\mathbb{C}$ będziemy pisać $a\in\mathbb{C}$
(jeśli tylko $a\in\mathbb{R}\in\mathbb{C}$

Oznaczając $(0,1)\in\mathbb{C}$ symbolem i dostajemy

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b(0,1)=a+bi=a+ib$$

Własności (ciała) liczb zespolonych:

(1) dodawanie i mnożenie są działaniami (a) łącznymi i
(b) przemiennymi

(a) łączne: $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1(z_2\cdot z_3)$
$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

(b) przemienne: $z_1+z_2=z_2+z_1$
$z_1\cdot z_3=z_3\cdot z_1$

(2) ~~działania te mają dla każdego~~
istnieją elementy neutralne
(a) dla mnożenia: $1\cdot z=z$, gdzie $1=(1,0)$
(b) dla dodawania: $0+z=z$, gdzie $0=(0,0)$

(3) Dla każdego $z\in\mathbb{C}$ istnieje element odwrotny
(a) ze względu na dodawanie: $z+(-z)=0$
$-z=(-a,-b)$

(b) ze względu na mnożenie, pod warunkiem, że

$$z=a+ib\neq 0$$

$$z^{-1}=(a+ib)^{-1}=\frac{(a-ib)}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$$

(4) Rozłączność mnożenia względem dodawania

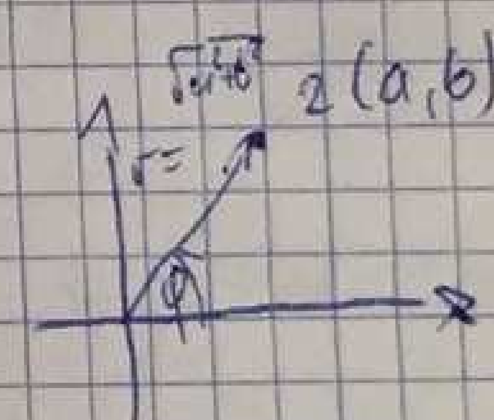
$$(z_1+z_2)\cdot z=z_1\cdot z+z_2\cdot z$$

Dygresja: Wielomian zespolony $a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_0$,
gdzie $a_k\in\mathbb{C}$ oraz $a_n\neq 0$ ma licząc z krotnościami n pierwiastków zespolonych.

Na przykład pierwiastkami wielomianu z^2+1 są liczby i oraz $-i$

Def. Jeśli $z=a+ib$, to a nazywamy częścią rzeczywistą liczby z oraz oznaczamy symbolem $Re(z)$, natomiast b nazywamy częścią ~~zesp~~ urojoną liczby z i oznaczamy $Im(z)$

Reprezentacja biegunowa liczby zespolonej.



Niech $z=a+ib\neq 0$

Wówczas $z=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$,

gdzie $r=\sqrt{a^2+b^2}$ będziemy oznaczać symbolem $|z|$, a $\varphi\in\mathbb{R}$ jest kątem takim, że $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, wtedy oznaczamy $arg(z)$

Zauważmy, że jeśli $z = z_1 \cdot z_2$ to $|z| = |z_1||z_2|$

$\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

Rzeczywiście, jeśli $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, a

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2))$$

$$= r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

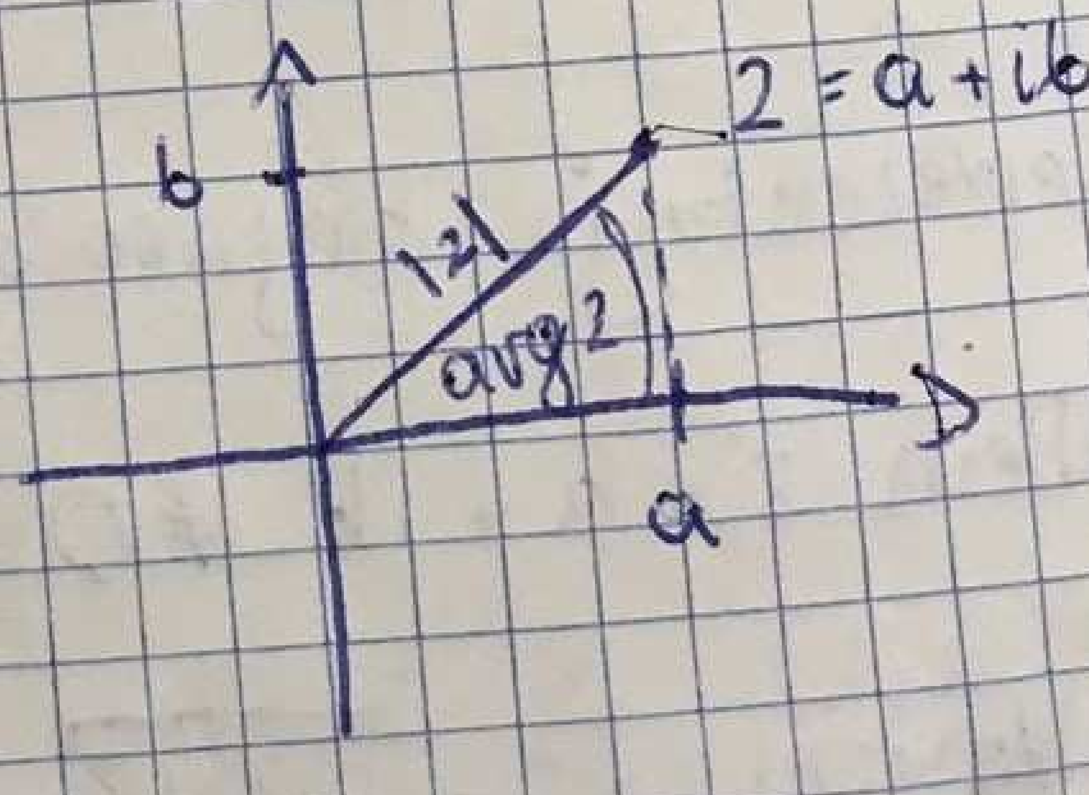
$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

$$(1+i)^{2018} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2018} = 2^{1009}\left(\cos\left(\frac{2018\pi}{4}\right) + i\sin\ldots\right.$$

$$= 2^{1009} i$$

$z \in \mathbb{C}$ ← (ciało) liczb zespolonych

↑ liczba zespolona $z = a + ib$



$a = Re(z)$

$b = Im(z)$

$\varphi = \arg z$

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

10.10 2018

$\arg z$ jest wyznaczony z dokładnością do wielokrotności 2π.