$$A = [a^i_j]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} = \underbrace{[\bar a_1, \bar a_2, \dots, \bar a_n]}_{\text{kolumny}} = \begin{bmatrix}\bar a^1\\ \bar a^2\\ \vdots\\ \bar a^m\end{bmatrix} \Bigg\}\ \text{wiersze}$$

pr. wekt. kolumn dł. m

$\langle \bar a_1, \dots, \bar a_n\rangle \subset \mathbb{F}^m$ z bazą $(\bar a_{j_1}, \bar a_{j_2}, \dots, \bar a_{j_c})$

P-nie: $\langle \bar a^1, \dots, \bar a^m\rangle \subset \mathbb{F}_n$ z bazą $(\bar a^{i_1}, \dots, \bar a^{i_r})$

pr. wekt. "wierszy" dł. n

Twierdzenie
Rząd kolumnowy A (czyli c) jest równy rzędowi wierszowemu A (czyli r).

Dowód bierzemy macierz $b^k_l = a^{i_k}_{j_l}$

$[b^k_l] \in M_{r\times c}(\mathbb{F})$

Pozostało wykazać, że kolumny macierzy $[b^k_l]$ są l.n.z.

Jeśli $\lambda^1 \bar b_1 + \dots + \lambda^c \bar b_c = 0$ to $\forall k \in \{1, \dots, r\}$ mamy

$\lambda^1 a^{i_k}_{j_1} + \dots + \lambda^c a^{i_k}_{j_c} = 0$. Niech $i \notin \{i_1, \dots, i_r\}$. Wówczas

istnieją $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{F}$: $\bar a^i = \alpha_1 \bar a^{i_1} + \dots + \alpha_r \bar a^{i_r}$.

Zatem $\lambda^1 a^i_{j_1} + \dots + \lambda^c a^i_{j_c} = \lambda^1(\alpha_1 a^{i_1}_{j_1} + \dots + \alpha_r a^{i_r}_{j_1}) + \dots + \lambda^c(\alpha_1 a^{i_1}_{j_c} + \dots + \alpha_r a^{i_r}_{j_c})$

$$= \alpha_1 \underbrace{(\lambda^1 a^{i_1}_{j_1} + \dots + \lambda^c a^{i_1}_{j_c})}_{=0} + \dots + \alpha_r \underbrace{(\lambda^1 a^{i_r}_{j_1} + \dots + \lambda^c a^{i_r}_{j_c})}_{=0} = 0$$

czyli $\lambda^1 \bar a_{j_1} + \dots + \lambda^c \bar a_{j_c} = 0$ & $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^c = 0$.

Widzimy więc, że kolumny macierzy $[b^k_l]$ są l.n.z. $\in M_{r,c}(\mathbb{F})$

Skoro $\bar b_1, \dots, \bar b_c \in \mathbb{F}^r$ i są l.n.z.

to $c \le r$.

Biorąc A^T dostajemy $r \le c$ i w końcu $r = c$.

Def. Rzędem macierzy $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ nazywamy (równoważnie) maksymalną liczbę liniowo niezależnych kolumn (wierszy) tej macierzy.

Zauważmy, że $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} A^T$.

Jeśli $A \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ interpretujemy jako liniowe odw. z $\mathbb{F}^n$ w $\mathbb{F}^m$ to $\operatorname{rz} A = \dim(\operatorname{im}(A))$.

<u>Wniosek</u>. Jeśli $A \in M_{m,l}(\mathbb{F})$, $B \in M_{l,k}(\mathbb{F})$ to $A \cdot B \in M_{m,k}(\mathbb{F})$ oraz $\operatorname{rz}(A \cdot B) \le \min(\operatorname{rz}(A), \operatorname{rz}(B))$.

<u>Dowód</u>: $\operatorname{rz}(A \cdot B) = \dim(\operatorname{im} A \cdot B) = \dim A(B(\mathbb{F}^k)) \le \dim(B(\mathbb{F}^k)) = \operatorname{rz}(B)$.

$B(\mathbb{F}^k) \subset \mathbb{F}^l$, $\le \dim(A(\mathbb{F}^l)) = \operatorname{rz}(A)$.

Przykład

$A: \mathbb{R}_5[\cdot] \ni w \longmapsto w' \in \mathbb{R}_4[\cdot]$.

A jest odwzorowaniem liniowym.

$\mathcal{E} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\}$ – baza $\mathbb{R}_5[\cdot]$

$\mathcal{F} = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ – baza $\mathbb{R}_4[\cdot]$

$A1 = 0,\ Ax = 1,\ Ax^2 = 2x,\ Ax^3 = 3x^2 \quad Ax^4 = 4x^3,\ Ax^5 = 5x^4$.

$\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_5$ są współ. wiel. w w bazie $\mathcal{E}$ to wsp Aw w bazie $\mathcal{F}$ są równe $(\alpha_1, 2\alpha_2, 3\alpha_3, \dots, 5\alpha_5)$ (czyli $(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_5 x^5)' = \alpha_1 + 2\alpha_2 x + \dots + 5\alpha_5 x^4$)

Rozważmy macierz $[a^i_j] \in M_{5,6}(\mathbb{R})$ postaci

$$[a^i_j] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Działając $[a^i_j]$ na wektor wsp. w, $\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_5 \end{bmatrix}$ dostajemy $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 3\alpha_3 \\ 4\alpha_4 \\ 5\alpha_5 \end{bmatrix}$

Macierz odwzorowania liniowego $A \in L(V, W)$.

Jeśli $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ jest bazą V to $v \in V$ zapisuje się jako $v = \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n$. Definiujemy odw. liniowe $V \ni v \longmapsto [v]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^n$.

Niech $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ będzie bazą W. Wówczas

i) $[Av]^{\mathcal{F}} = [A(\lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n)]^{\mathcal{F}} = [\lambda^1 A(e_1) + \dots + \lambda^n A(e_n)]^{\mathcal{F}} = \lambda^1 [Ae_1]^{\mathcal{F}} + \dots + \lambda^n [Ae_n]^{\mathcal{F}}$

gdzie $A(e_i) \in W$.

ii) Rozpatrzmy wektory $[Ae_i]^{\mathcal{F}} \in \mathbb{F}^m$ i ustawmy $[Ae_i]^{\mathcal{F}}$ w macierz $\left[[A(e_1)]^{\mathcal{F}}, [A(e_2)]^{\mathcal{F}}, \dots, [A(e_n)]^{\mathcal{F}} \right]$ o n kolumnach i m wierszach. Oznaczamy $[A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$

Przy tych oznaczeniach: dla $v = \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n$ i $Av = \mu^1 f_1 + \dots + \mu^m f_m$ zachodzi związek $\begin{bmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^m \end{bmatrix} = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^n \end{bmatrix}$

Innymi słowy $[Av]^{\mathcal{F}} = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} [v]^{\mathcal{E}}$

Definicja: $[A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ nazywamy macierzą odwzorowania liniowego A w bazach $\mathcal{E}$ i $\mathcal{F}$ przy V i W (odpowiednio).

Wracając do przykładu. $\tilde{\mathcal{E}} = (1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3, 1+x+x^2+x^3+x^4, 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)$; $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$.

$\frac{d}{dx}: \mathbb{R}_5[\cdot] \to \mathbb{R}_4[\cdot]$ $\quad \boxed{\left[\frac{d}{dx}\right]^{\tilde{\mathcal{F}}}_{\tilde{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}$

$d_0, d_1, \dots, d_s$ są współ. wpel. W ...

Uwaga: Odw.: $L(V,W) \ni A \longmapsto [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ $m = \dim W$, $n = \dim V$.

jest liniowym izomorfizmem

Czyli $[A+B]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} + [B]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ $\forall_{A,B \in L(V,W)}$.

$[\lambda A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \lambda [A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$

oraz mając macierz $[a^i_j] \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ znajdę dokładnie jedno odw. $A \in L(V,W)$ t. że $[A]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [a^i_j]$

gdzie $A(\lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^n e_n) = \sum_{i,j} f_i a^i_j \lambda^j$