$L(V,W) \ni A \longmapsto [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} \in M_{n,m}(\mathbb{F})$ gdzie $n = \dim W$ $m = \dim V$

$\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ - baza W, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_m)$ - baza V

$V \ni v = \lambda^1 e_1 + \dots + \lambda^m e_m$ $\quad [v]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^m \end{bmatrix}$

$[A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} = \left[[Ae_1]^{\mathcal{F}}, \dots, [Ae_m]^{\mathcal{F}} \right]$

kolumny.

$[Av]^{\mathcal{F}} = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} [v]^{\mathcal{E}}$.

Stwierdzenie Niech $A \in L(V,W)$, $B \in L(W,U)$ i niech $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ będą bazami V, W i U odpowiednio

$[B \circ A]^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}} = [B]^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} \cdot [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$

złożenie odwzorowań liniowych — iloczyn macierzy

$[B \circ A\, v]^{\mathcal{G}} = [B(Av)]^{\mathcal{G}} = [B]^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} [Av]^{\mathcal{F}} = \underbrace{[B]^{\mathcal{G}}_{\mathcal{F}} \cdot [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}} \underbrace{[v]^{\mathcal{E}}}$ $\quad \forall v \in V$.

$\underbrace{[B \circ A]^{\mathcal{G}}_{\mathcal{E}}} \underbrace{[v]^{\mathcal{E}}}$ a zatem mamy tezę. ☒

Macierz zmiany bazy: $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - bazy przy V. Macierzą przejścia z bazy $\mathcal{E}$ do bazy $\mathcal{E}'$ nazywamy macierz $[id_V]^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}}$.

Np. w 1-ej kol. tej macierzy mamy $[e_1]^{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^n \end{bmatrix}$ gdzie $e_1 = \mu^1 e_1' + \dots + \mu^n e_n'$.

Uwaga (1) $[id_V]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} = [\underbrace{id_V} \circ \underbrace{id_V}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = [id_V]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} [id]^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}}$

zatem $[id]^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}} = \left([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} \right)^{-1}$.

Uwaga 2.

Niech $A \in L(V,W)$; $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ - bazy V; $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ - bazy W

$[id_W]^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{F}} [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} [id_V]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} = [id_W \circ A \circ id_V]^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{E}'} = [A]^{\mathcal{F}'}_{\mathcal{E}'}$

Przykład (macierz przejścia)

$V = \mathbb{R}_2[\cdot]$, $\mathcal{E} = (\overset{e_1}{1}, \overset{e_2}{x}, \overset{e_3}{x^2})$, $\mathcal{E}' = (\overset{e_1'}{1}, \overset{e_2'}{x-1}, \overset{e_3'}{(x-1)^2})$ $\quad e_1' = 1e_1$, $e_2' = 1e_2 - 1e_1$

$[id]^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad e_3 = e_3' + 2e_2' + 1 \cdot e_1'$ $\quad [id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$| x^2 - 2x + 1 + 2(x-1) |$

$x^2 - 1$

$e_3' = 1e_1 - 2e_2 + 1e_3$

Równania liniowe.

Niech $A \in L(V,W)$ i $b \in W$. Równanie na $x \in V$ nazywamy r-nie postaci $Ax = b$. Jeśli $b = 0$ to mówimy, że r-nie jest jednorodne a $\ker A$ nazywamy Rozwiązaniem Ogólnym Równania jednorodnego, w skrócie [R.O.R.J.].

Dowolne rozwiązanie r-nia niejednorodnego nazywamy Rozw. Szczególnym Równania Niejednorodnego, [RSRN].

Zbiór $\{x : Ax = b\}$ nazywamy Rozwiązaniem Ogólnym Równania Niejednorodnego.

Fakt Jeśli $x_1, x_2 \in$ RORNJ to $x_1 - x_2 \in$ RORJ

$Ax_1 = b$ & $Ax_2 = b \Rightarrow A(x_1 - x_2) = b - b = 0$.

Zatem RORNJ $=$ RORJ $+$ RSRNJ. gdyż $x_2 - x_1 \in$ RORJ czyli $x_2 \in x_1 +$ RORJ

$\{x : Ax = b\} = \ker A + x_1$

Wybierając bazy $\mathcal{E}$ & $\mathcal{F}$ w V & W równanie $Ax = b$ możemy zapisać $[A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} \cdot [x]^{\mathcal{E}} = [b]^{\mathcal{F}}$. Od tej pory rozważamy r-nia macierzowe $Ax = b$, $A \in M_{n,m}(\mathbb{F})$, $b \in \mathbb{F}^n$, $x \in \mathbb{F}^m$.

Układ (*) r-ń liniowych
$$\begin{cases} a^1_1 x^1 + \dots + a^1_m x^m = b^1 \\ \vdots \\ a^n_1 x^1 + \dots + a^n_m x^m = b^n \end{cases}$$

(*) posiada rozwiązanie jeśli $\langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m \rangle = \langle \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m, b \rangle$

Zbiór rozwiązań układu (*) nie zmieni się jeśli wielokrotność jednego z równań dodamy do pozostałych wierszy...

Redukcje wierszowe układu równań liniowych

$$A^e = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & 5 & 12 & 10 \\ 2 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \end{array}\right], \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \end{bmatrix} \qquad \boxed{Ax = b}$$

$$A^e = [A, b] \underset{w_1 - 5w_3}{\overset{w_2 - 2w_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & -32 & -40 & -8 & 0 \\ 0 & -12 & -15 & -3 & 0 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{w_2 : 3}{\overset{w_1 : 8}{\sim}} \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 7 & 9 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{w_2 - 4w_1}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & -11 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} 4x^2 + 5x^3 + x^4 = 0 \\ x^1 - 9x^2 - 11x^3 = 2. \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x^1 = 2 + 9x^2 + 11x^3 \\ x^4 = 0 - 4x^2 - 5x^3 \end{array}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} + x^3 \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\text{RORNJ} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{RSRNJ}} + \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} \right\rangle}_{\text{RORJ}}$$