Formy dwuliniowe i formy kwadratowe

$$\phi(w,\tilde{w}) = \int_0^1 w(t)\,\tilde{w}'(t)\,dt \in \mathbb{R}. \qquad \varphi(w) = \phi(w,w) = \int_0^1 w(t)\,w'(t)\,dt.$$

$w, \tilde{w} \in \mathbb{R}_3[\,]$ $\qquad \varphi : \mathbb{R}_3[\cdot] \longrightarrow \mathbb{R}.$

$\phi : \mathbb{R}_5[\cdot] \times \mathbb{R}_5[\cdot] \longrightarrow \mathbb{R}$

Definicja. Niech $\phi : V \times V \to \mathbb{F}$ będzie formą dwuliniową. Odwzorowanie $\varphi : V \to \mathbb{F}$ t. że $\varphi(v) = \phi(v,v)$ nazywamy formą kwadratową wiązaną z ϕ.

Przykład. Formy kwadratowe na $V = \mathbb{R}^2$. Niech $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\phi_A(x,\tilde{x}) = x^T A \tilde{x} = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = a x_1 \tilde{x}_1 + b x_1 \tilde{x}_2 + c x_2 \tilde{x}_1 + d x_2 \tilde{x}_2.$$

$$\varphi_A(x) = \phi_A(x,x) = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a x_1^2 + (b+c) x_1 x_2 + d x_2^2.$$

$$\phi_a(v,\tilde{v}) = \tfrac{1}{2}\left(\phi(v,\tilde{v}) - \phi(\tilde{v},v)\right)$$

Przypomnienie. $\phi = \phi_a + \phi_s$, $\quad \phi_s(v,\tilde{v}) = \tfrac{1}{2}\left(\phi(v,\tilde{v}) + \phi(\tilde{v},v)\right)$

Zauważmy $\varphi(v) = \phi_a(v,v) + \phi_s(v,v) = \phi_s(v,v)$.

Stwierdzenie. Jeśli $\varphi, \phi, \phi_a, \phi_s$ j.w. to

$$\phi_s(v,\tilde{v}) = \tfrac{1}{2}\left(\varphi(v+\tilde{v}) - \varphi(v) - \varphi(\tilde{v})\right)$$ – formuła polaryzacyjna.

Dowód: Obliczmy $\varphi(v+\tilde{v}) = \phi(v+\tilde{v}, v+\tilde{v}) = \phi(v,v) + \phi(\tilde{v},\tilde{v}) + \phi(v,\tilde{v}) + \phi(\tilde{v},v) =$

$= \varphi(v) + \varphi(\tilde{v}) + 2\,\phi_s(v,\tilde{v}).$ $\blacksquare$

Uwaga: Powyższe stw. zadaje 1-1 odpowiedniość między symetrycznymi formami dwuliniowymi a formami kwadratowymi.

Przykład $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa

$$\varphi\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ rozważmy $\phi_\lambda(x,\tilde{x}) = x^T \begin{bmatrix} a & \frac{b-\lambda}{2} \\ \frac{b+\lambda}{2} & c \end{bmatrix} \tilde{x}$

Zauważmy, że $\varphi(x) = \phi_\lambda(x,x)$. ϕ_0 jest symetryczną formą dwuliniową oraz $\varphi(x) = \phi_0(x,x)$.

Przykład φ – forma kwadratowa i niech ϕ będzie symetryczną formą dwuliniową zadaną przez φ.

Macierz formy φ w bazie $\mathcal{E}$ definiujemy jako macierz ϕ w $\mathcal{E}$.

$\operatorname{rząd} \varphi \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rząd} \phi$

φ niezdegenerowana gdy ϕ jest niezdegenerowana.

Wracając do przykładu. $\mathcal{E}$ – baza standardowa $\mathbb{R}^2$.

$$[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$$

Definicja Mówimy baza $\mathcal{E}$ diagonalizuje formę kwadratową φ jeśli macierz $[\varphi]_{\mathcal{E}}$ jest diagonalna.

Przykład $\varphi(x) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$. Zad. znaleźć bazę diagonalizującą. $\varphi(x) = \underbrace{(x_1+2x_2)^2 - x_2^2} = 3\left(x_2 + \tfrac{2}{3}x_1\right)^2 - \tfrac{1}{3}x_1^2$

Rozważmy dwie formy liniowe na $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\begin{array}{l} \psi_1(x) = x_1 + 2x_2 \\ \psi_2(x) = x_2 \end{array}}$ $\quad \boxed{[\varphi]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Wówczas $\varphi(x) = (\psi_1(x))^2 - (\psi_2(x))^2 = (\psi_1^2 - \psi_2^2)(x)$

$\mathcal{E}^* = \left(\psi_1 = [1,2],\ \psi_2 = [0,1]\right)$; $\quad \mathcal{E} = \left(f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ f_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$

Notacja Niech $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. Wówczas funkcja

$\varphi : V \ni v \longmapsto \varphi_1(v)\,\varphi_2(v) \in \mathbb{F}$ jest formą kwadratową.

$$\Phi(v,\tilde{v}) = \varphi_1(v)\,\varphi_2(\tilde{v}) \,, \quad \tfrac{1}{2}\left(\varphi_1(v)\varphi_2(\tilde{v}) + \varphi_2(v)\varphi_1(\tilde{v})\right) = \Phi_s(v,\tilde{v})$$

Notacja: $\varphi \overset{\text{ozn}}{=} \varphi_1 \cdot \varphi_2$, $\Phi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$. W szczególności

$$\Phi_s = \tfrac{1}{2}\left(\varphi_1 \otimes \varphi_2 + \varphi_2 \otimes \varphi_1\right).$$

Jeśli teraz $\varphi : V \to \mathbb{F}$ – dowolna forma kwadratowa oraz

$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ – baza V, $\mathcal{E}^* = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ – dualna

Macierz φ w $\mathcal{E}$: $[\varphi]_{\mathcal{E}} = [a_{ij}]$ $\quad a_{ij} = a_{ji}$

Zachodzi: $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \psi_i \cdot \psi_j$.

<u>Tw</u> (Lagrange'a) Dla każdej formy kwadratowej istnieje (conajmniej jedna) baza diagonalizująca.

$\mathcal{E}^* = (\psi_1, \dots, \psi_n)$, $\varphi = \sum_{i,j} a_{ij} \cdot \psi_i \cdot \psi_j$ gdzie $a_{ij} = a_{ji}$.

<u>Dowód</u>: Przypuśćmy, że $a_{ii} \neq 0$ dla pewnego i, np. $i = 1$.

Rozważmy formę liniową $\tilde{\psi}_1 = \psi_1 + \frac{1}{a_{11}} \sum_{j \neq 1} a_{1j} \psi_j$

$$\boxed{\tilde{\psi}_1^2 = \psi_1^2 + \frac{2}{a_{11}} \sum_{j \geq 2} a_{1j} \psi_1 \psi_j + \text{wyrazy bez } \psi_1}$$

Wówczas istnieją wsp. b_{ij}, $i,j = 2, \dots, n$ t. że

$$\sum_{i,j} a_{ij} \psi_i \psi_j = a_{11} \tilde{\psi}_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij} \psi_i \psi_j$$

np.: $a_{11}\psi_1^2 + a_{12}\psi_1\psi_2 + a_{21}\psi_2\psi_1 + a_{22}\psi_2^2 =$ $\quad (a_{12} = a_{21})$

$$= a_{11}\left(\psi_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}\psi_2\right)^2 + \left(a_{22} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}}\right)\psi_2^2$$

Jeśli $a_{ii} = 0$ $\forall_i$ to postępujemy następująco.

Niech $a_{ij} \neq 0$ dla pewnych i, j $i \neq j$. (np. $i = 1$, $j = 2$)

wtedy $\varphi = 2 \cdot a_{12}\, \psi_1 \psi_2 + \underbrace{\sum a_{ij} \cdot \psi_i \cdot \psi_j}_{\text{pozostałe składniki}}$.

Zauważmy, że $\psi_1 \cdot \psi_2 = \dfrac{(\psi_1 + \psi_2)^2 - (\psi_1 - \psi_2)^2}{4} = \left(\dfrac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\psi_1 - \psi_2}{2}\right)^2$

Kładziemy $\tilde{\psi}_1 = \dfrac{\psi_1 + \psi_2}{2}$ $\quad \tilde{\psi}_2 = \dfrac{\psi_1 - \psi_2}{2}$ $\quad \tilde{\psi}_j = \psi_j$, $j > 2$

Wówczas $\varphi = 2a_{12}\tilde{\psi}_1^2 - 2a_{12}\tilde{\psi}_2^2 + \underbrace{\dots\dots}_{\text{pozostałe wyrazy}}$

i dalej jak w poprzednim kroku.

Po skończonej liczbie kroków znajdziemy $\mathcal{E}^* = (\Theta_1, \dots, \Theta_n)$: $\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \Theta_i^2$

Przykład

$V = \mathbb{R}^3$ $\quad \varphi(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{x_1 - x_2}{2}\right)^2 + x_2 x_3$ $\quad (y_1, y_2, y_3)$ $\quad x_2 = y_1 - y_2$

$= y_1^2 - y_2^2 + y_1 y_3 - y_2 y_3 =$

$= \left(y_1 + \dfrac{y_3}{2}\right)^2 - \dfrac{y_3^2}{4} - y_2^2 - y_2 y_3 = \left(y_1 + \dfrac{y_3}{2}\right)^2 - \left(y_2 + \dfrac{y_3}{2}\right)^2$

$\psi_1 = y_1 + \dfrac{y_3}{2} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{2}$, $\quad \psi_2 = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{2}$, $\quad \psi_3 =$

$\psi_1 = \frac{1}{2}[1\ 1\ 1]$ $\quad \mathcal{E}^* = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ $\quad \varphi = \psi_1^2 - \psi_2^2$

$\psi_2 = \frac{1}{2}[1\ {-1}\ 1]$ $\quad \mathcal{E} = (f_1, f_2, f_3)$

$\psi_3 \overset{\text{np.}}{=} [1\ 0\ {-1}]$ $\quad (f_1, f_2, f_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$