$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ np.: $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 - \underbrace{3x_1x_2}_{\text{wyraz mieszany}} + x_2^2$ diagonalne

Narysować zbiór $\varphi^{-1}(p) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} . \ \varphi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = p \right\}$.

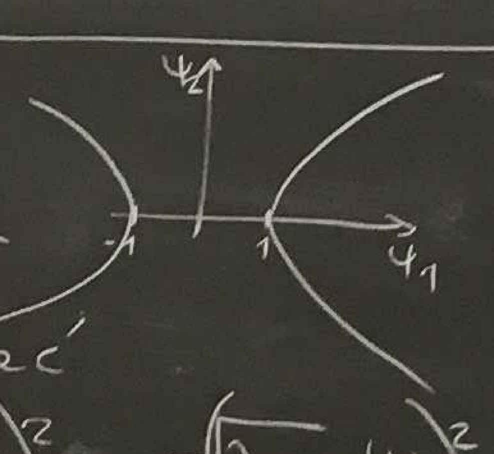
$[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ tw Lagrange'a:
Istnieją współrzędne na $\mathbb{R}^2$
w których macierz φ jest diagonalna

Czyli istnieją $\psi_1, \psi_2 \in (\mathbb{R}^2)^*$ oraz skalary $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
takie, że $\varphi = \lambda_1 \psi_1^2 + \lambda_2 \psi_2^2 + 0 \cdot \psi_1 \psi_2$ W tych współrzędnych
macierz φ jest równa $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$

$\varphi = (x_1 - \frac{3}{2}x_2)^2 - \frac{5}{4}x_2^2$, $\psi_1 = x_1 - \frac{3}{2}$, $\lambda_1 = 1$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix}$ $\psi_2 = x_2$, $\lambda_2 = -\frac{5}{4}$

$\varphi = -\frac{5}{4}x_1^2 + (x_2 - \frac{3}{2}x_1)^2$
$\tilde{\psi}_1 = x_1$ $\tilde{\psi}_2 = (x_2 - \frac{3}{2}x_1)^2$. $\begin{bmatrix} -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\varphi = \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2$. $\varphi^{-1}(1) = \{ \psi_1^2 - \frac{5}{4}\psi_2^2 = 1 \}$.



Ogólniej: $\varphi: V \to \mathbb{R}$ - f. kwadratowa
φ w pewnej bazie ma postać
$\varphi = (\sqrt{\lambda_1}\psi_1)^2 + (\sqrt{\lambda_2}\psi_2)^2 + \ldots + (\sqrt{\lambda_r}\psi_r)^2 - (\sqrt{\lambda_{r+1}}\psi_{r+1})^2 - \ldots - (\sqrt{\lambda_{r+s}}\psi_{r+s})^2$.
gdzie $\lambda_i > 0$ $i = 1, .., r+s$.
$\tilde{\psi}_i = \sqrt{\lambda_i}\,\psi_i$.

Twierdzenie Niech $\varphi: V \to \mathbb{R}$ (Ψ_i), (Φ_j) bazy V t. że
$\varphi = \psi_1^2 + .. + \psi_r^2 - \psi_{r+1}^2 - \ldots - \psi_{r+s}^2 = \phi_1^2 + .. + \phi_{r'}^2 - \phi_{r'+1}^2 \ldots - \phi_{r'+s'}^2$
Wówczas $r = r'$ & $s = s'$.

Dowód: $r + s = r' + s' = $ rząd φ.
Dla uproszczenia zał. że $r + s = \dim V$.
Przypuśćmy na przykład, że $r > r'$.
Rozważmy układ równań liniowych:

$$\begin{cases} \phi_1(v) = 0 \\ \vdots \\ \phi_{r'}(v) = 0. \\ \psi_{r+1}(v) = 0 \\ \vdots \\ \psi_{r+s}(v) = 0 \end{cases}$$

Mamy $r' + s$ równań na wektor v w p-ni wymiaru n. Istnieje wektor $v \neq 0$ spełniający ten układ r-ń. Zatem
$\varphi(v) = \psi_1(v)^2 + .. + \psi_r(v)^2 = -\phi_{r'+1}(v)^2 - \ldots - \phi_{r'+s'}(v)^2 = 0$.

W takim razie $\psi_1(v) = \psi_2(v) = \ldots = \psi_n(v) \Rightarrow v = 0$ $\boxtimes$

Definicja Sygnaturą ($\operatorname{sgn}\varphi$) formy kw. $\varphi: V \to \mathbb{R}$ nazywamy parę liczb (r, s) gdzie r (s) jest liczbą dodatnich (ujemnych) elementów macierzy φ w bazie diagonalizującej

Przykład $\operatorname{sgn}(x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2) = (1, 1)$
$\operatorname{sgn}(x_1^2) = (1, 0)$ $\operatorname{sgn}(-x_1^2) = (0, 1)$.

Diagonalizacja formy kwadratowej metodą Jacobiego.
$\varphi: V \to \mathbb{R}$ - forma kwadr., $[\varphi_{ij}]$ macierz w bazie $\mathcal{E} = (e_1, .., e_n)$.
$Q: V \times V \to \mathbb{R}$ - symetryczna forma 2-liniowa $\varphi_{ij} = Q(e_i, e_j)$
$D_i = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11}, .., \varphi_{1i} \\ \vdots \\ \varphi_{i1}, .., \varphi_{ii} \end{bmatrix} \underset{\text{zał}}{\neq} 0$.

Rozważmy wektory $f_1, \ldots, f_n$ gdzie

$$f_1 = e_1 \quad \& \text{ dla } i>1 \quad f_i = \frac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11}, \ldots, \varphi_{1i} \\ \varphi_{i-1\,1}, \ldots, \varphi_{i-1\,i} \\ e_1, \ldots, e_i \end{bmatrix}$$

Np. $f_2 = \dfrac{\det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ e_1 & e_2 \end{bmatrix}}{D_1} = \dfrac{1}{\varphi_{11}} \left(\varphi_{11} e_2 - \varphi_{12} e_1 \right) = e_2 - \dfrac{\varphi_{12}}{\varphi_{11}} e_1$

$$f_3 = \frac{\det}{D_2} \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \\ e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} = e_3 - \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{23} \end{bmatrix} \cdot e_2 + \frac{1}{D_2} \det \begin{bmatrix} \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{22} & \varphi_{23} \end{bmatrix}.$$

i.t.d.

Widać $f_i = e_i + x_i$, $x_i \in \langle e_1, \ldots, e_{i-1} \rangle$.

Zatem $\mathcal{F}(f_1, \ldots, f_n)$ jest bazą V.

Twierdzenie. Baza $\mathcal{F}$ diagonalizuje φ oraz $[\varphi]_{\mathcal{F}} = \operatorname{diag}\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}}\right)$

Przykład $[\varphi]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $\quad D_1 = 1, \quad D_2 = -\frac{5}{4}$ $\quad [\varphi]_{\mathcal{F}} = \operatorname{diag}\left(1, -\frac{5}{4}\right)$

$\mathcal{F} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

Dowód twierdzenia.

Naszym celem jest obliczenie $Q(f_i, f_j)$.

Zał., że $j<i$ i obliczmy $Q(f_i, e_j) = \dfrac{1}{D_{i-1}} \det \begin{bmatrix} \varphi_{11}, \ldots, \varphi_{1i} \\ \varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{ji} \\ \varphi_{i-1\,1}, \ldots, \varphi_{i-1\,i} \\ \varphi_{j1}, \ldots, \varphi_{ji} \end{bmatrix} \leftarrow = 0$

Dla $j=1$ $\quad Q(f_i, e_i) = \dfrac{D_i}{D_{i-1}}$

Zatem $[\varphi]_{\mathcal{F};i,j} = Q(f_i, f_j) = \begin{cases} Q(f_i, e_j + x_j) = 0 & j<i \\ Q(f_i, e_i + x_i) = \underset{\cancel{Q(f_i, x_i)}}{Q(f_i, e_i)} = \dfrac{D_i}{D_{i-1}} & j=i \end{cases}$ ∎

Definicja $\varphi: V \to \mathbb{R}$, $\dim V = n$. Mówimy, że jest dodatnio określona jeśli $\operatorname{sgn} \varphi = (n, 0)$

Równoważnie $\forall_{v \neq 0} \; \varphi(v) > 0$.

φ - ujemnie określona jeśli $\operatorname{sgn} \varphi = (0, n) \iff \forall_{v \neq 0} \; \varphi(v) < 0$.

Twierdzenie $\varphi: V \to \mathbb{R}$ f. kw., $\mathcal{E}$ - baza, $[\varphi]_{\mathcal{E}} = [\varphi_{ij}]$. Wówczas φ jest dod. określona $\iff \forall_{i \in \{1, \ldots, n\}} \; D_i > 0$.

Dowód: $\Leftarrow$ - prosty wniosek z poprzedniego twr.

$\Rightarrow$

Zauważmy, że $\varphi|_{\langle e_1, \ldots, e_i \rangle}$ nie nad i gdyż jest dodatnio określona $\Rightarrow$ niezdegenerowany. Stąd

$$0 \neq \det\left(\left[\varphi|_{\langle e_1, \ldots, e_i \rangle} \right]_{(e_1, \ldots, e_i)} \right) = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \ldots & \varphi_{1i} \\ \varphi_{i1} & \ldots & \varphi_{ii} \end{bmatrix} = D_i.$$

$\operatorname{sgn} \varphi = (n, 0)$ $\qquad [\varphi]_{\mathcal{F}} = \operatorname{diag}\left(D_1, \frac{D_2}{D_1}, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}}\right)$

Zatem $D_1 > 0, \frac{D_2}{D_1} > 0, \ldots, \frac{D_n}{D_{n-1}} > 0$ - a to jest spełnione tylko gdy $D_1 > 0, D_2 > 0, \ldots, D_n > 0$ ∎