$\varphi: V \to \mathbb{F}$ $\quad \mathcal{E}, \mathcal{F}$ $\quad \underbrace{\left([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}\right)^T [\varphi]_{\mathcal{E}} [id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = [Q]_{\mathcal{F}}}_{\text{reguła transformacyjna dla macierzy form kwadratowych}}$.

Reguła tr. dla macierzy odw. liniowego.

$A: V \to V \qquad [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} [A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} [id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}, \quad [id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} = \left([id]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}\right)^{-1}$.

Czy można zdiagonalizować macierz odwzorowania liniowego? Odpowiedź: na następnych kilka wykł.

Kończymy wątek kryterium Sylwestera:

φ - jest dodatnio określona $\quad D_i > 0$

Definicja φ jest ujemnie określona gdy $-\varphi$ jest dod. określona

Wniosek Forma φ jest ujemnie określona gdy $(-1)^i D_i > 0$

gdzie $D_i = \det \begin{bmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{1i} \\ \varphi_{i1}, & \varphi_{ii} \end{bmatrix} \overset{\text{notacja}}{=} \begin{vmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{1i} \\ \vdots & \\ \varphi_{i1}, & \varphi_{ii} \end{vmatrix}$

Struktura endomorfizmu.

Definicja. Odwzorowanie liniowe $A: V \to V$ nazywamy endomorfizmem przestrzeni V. $\left(L(V,V) \overset{\text{ozn}}{=} L(V)\right)$

0. Rzuty na podprzestrzenie.

Przykład: $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus W_1 \qquad V_1 = \left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle, \quad W_1 = \left\langle \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$

$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\z\end{bmatrix}$. $\qquad P\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x\\y\\0\end{bmatrix}$. Zauważmy, że $P_1^2 = P_1$

$[P_1]_{st} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

Inny rozkład $\mathbb{R}^3 = \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\rangle}_{V_2} \oplus \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \right\rangle}_{W_2} \qquad \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \underset{\in V_2}{\begin{bmatrix}x-z\\y-z\\0\end{bmatrix}} + \underset{\in W_2}{\begin{bmatrix}z\\z\\z\end{bmatrix}}$

$P_2\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x-z\\y-z\\0\end{bmatrix}$. $\qquad P_2^2 = P_2 \qquad [P_2]_{st} = \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$

Ogólniej jeśli p-ń wektorowa U jest sumą prostą $V, W \subset U$ to operator rzutu na V wzdłuż W jest dany następującym wzorem $Pu = v$ gdzie $u = v + w$ i $v \in V$, $w \in W$. Łatwo sprawdzić, że $P^2 = P$. $W = \ker P$, $\operatorname{im} P = V$.

Definicja Endomorfizm $P \in L(U)$ nazywamy rzutem gdy $P^2 = P$

Stwierdzenie. $P \in L(U)$, $P^2 = P$, $W = \ker P$, $V = \operatorname{im} P$. Wtedy $\underline{U = V \oplus W}$ oraz P jest rzutem na V wzdłuż W.

Dowód Weźmy $u \in U$: $u = Pu + (1-P)u$ & $Pu \in \operatorname{im} P$ i $(1-P)u \in \ker P$

gdyż $P(1-P)u = (P - \underset{P}{P^2})u = 0$. Czy $\operatorname{im} P \cap \ker P = \{0\}$?

Jeśli $u \in \operatorname{im} P$ & $u \in \ker P$ to $\exists_{x \in V}$ $u = Px = PPx = Pu = 0$.

Definicja Jeśli $A \in L(U)$ oraz $V \subset U$ jest podprzestrzenią t. że $AV \subset V$, to mówimy, że jest A-niezmiennicza

Uwaga: Niech V będzie niezmiennicza dla $A: U \to U$, $\mathcal{E}_0 = \{e_1, \dots, e_k\}$ bazą V, $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ - baza $U \Rightarrow [A]_{\mathcal{E}_1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{1k} & * \\ \vdots & & \\ a_{k1} & a_{kk} & \\ 0 & 0 & ** \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$

$* \in M_{k, n-k}(\mathbb{F}) \qquad ** \in M_{n-k, n-k}(\mathbb{F})$.

Uwaga 2 Przypuśćmy, że $U = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_\ell$ & $AV_i \subset V_i$ $i \in 1,\ldots,\ell$ wtedy istnieje baza $\mathcal{E}$ przy U t. że $A = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & & \vdots \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & B_\ell \end{bmatrix}$

gdzie $B_i \in M_{n_i \times n_i}(\mathbb{F})$ & $n_i = \dim V_i$.

$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_{n_1}, e_{n_1+1}, \ldots, e_{n_1+n_2}, \ldots, e_{n_1+n_2+\ldots+n_\ell}\}$

Definicja Mówimy, że $0 \neq u \in U$ jest wektorem własnym $A \in L(U)$ jeśli $Au = \lambda u$ dla pewnego skalara $\lambda \in \mathbb{F}$. Mówimy wówczas, że λ jest wartością własną A. Zbiór wartości wł. A nazywamy spektrum A i oznaczamy $sp(A) \subset \mathbb{F}$. Jeśli $\lambda \in \mathbb{F}$ to $V_\lambda = \ker(A - \lambda \mathbb{1})$ nazywamy podprzestrzenią własną dla $\lambda \in \mathbb{F}$.

Przykład: $sp(P) = \{0, 1\}$.

Zauważmy $\lambda \in sp(A) \iff \ker(A - \lambda\mathbb{1}) \neq \{0\} \iff A - \lambda\mathbb{1}$ jest operatorem nieodwracalnym.

$\Updownarrow$

$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0$. $[\mathbb{1}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Uwaga: Jeśli $A \in L(V)$ to $\det([A]_{\mathcal{E}}) = \det([A]_{\mathcal{F}}) \equiv \det(A)$

gdyż $\det[A]_{\mathcal{E}} = \det\left(([id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}})^{-1}[A]_{\mathcal{F}}[id]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}\right) = \det([A]_{\mathcal{F}})$.

Operator A jest odwracalny $\iff [A]_{\mathcal{E}}$ - odwracalna $\iff \det A \neq 0$.

Definicja Wielomian $\mathbb{F} \ni \lambda \longmapsto \det(A - \lambda\mathbb{1}) \in \mathbb{F}$ nazywamy wielomianem charakterystycznym operatora A, ozn $w_A(\lambda)$.

Wniosek $sp A = \{\lambda \in \mathbb{F} : w_A(\lambda) = 0\}$.

Przykład $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. $sp A$: $w_A(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 1$

Inny rozkład $\mathbb{R}^3 = \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle}_{V_2} \oplus \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{W_2}$ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x-z \\ y-z \\ 0 \end{bmatrix}}_{\in V_2} + \underbrace{\begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix}}_{\in W_2}$

$P_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-z \\ y-z \\ 0 \end{bmatrix}$. $P_2^2 = P_2$ $[P_2]_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ogólniej jeśli p-ń wektorowe U jest sumą prostą $V \oplus W \subset U$ to operator rzutu na V wzdłuż W jest dany następującym wzorem $Pu = v$ gdzie $u = v + w$ i $v \in V$, $w \in W$. Łatwo sprawdzić, że $P^2 = P$. $W = \ker P$, $\operatorname{im} P = V$.

Definicja Endomorfizm $P \in L(U)$ nazywamy rzutem gdy $P^2 = P$

pierwiastki w_A: $\Delta = 1 + 4$ $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt5}{2}$ $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt5}{2}$.

Wektory własne: $V_{\lambda_1} = \ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \ker\begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt5}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1+\sqrt5}{2} \end{bmatrix}$

$= \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1+\sqrt5}{2} \end{bmatrix} \right\rangle$. $V_{\lambda_2} = \ker\begin{bmatrix} \frac{1-\sqrt5}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt5}{2} \end{bmatrix} = \left\langle \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt5}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

Ciąg Fibonacciego $x_0 = 1 = x_1$. $\overset{x_0}{1}, \overset{x_1}{1}, \overset{x_2}{2}, 3, 5, 8, 13, \overset{x_7}{21}, \ldots$

$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$. Znaleźć ogólny wzór $x_n = ?$

Wiel. charakterystyczny $\lambda^2 - \lambda - 1$. Zauważmy, że $\begin{bmatrix} x_{n+2} \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$

$= \ldots = A^{n+1}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}$.