Klatki Jordanowskie $\begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon_1 & & 0 \\ & \lambda & \varepsilon_2 & \\ & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varepsilon_k \in \{0,1\}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

W - nad $\mathbb{C}$.

Tw: $A \in \mathrm{End}(W)$, $\mathrm{Sp}\, A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$

Istnieje baza (Jordanowska) $\mathcal{E}$ przy W, tzn. baza taka że $[A]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ jest sumą klatek Jordanowskich z λ_i na diagonali.

Operator nilpotentny: $N^q = 0$ - q - st. nilpotentności $N^{q-1} \neq 0$.

Przykład $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $q = 3$.

$A \rightsquigarrow W_{\lambda_i} = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})^{n_i} \subset W$ $A_{\lambda_i} : W_{\lambda_i} \to W_{\lambda_i}$ $A_{\lambda_i} = A|_{W_{\lambda_i}}$

$$A_{\lambda_i} = \underset{D_{\lambda_i}}{\underset{\shortparallel}{\lambda_i \mathbb{1}_{W_{\lambda_i}}}} + \underbrace{(A_{\lambda_i} - \lambda_i \mathbb{1}_{W_{\lambda_i}})}_{N_{\lambda_i}} \qquad N_{\lambda_i}^{n_i} = 0.$$

Dowód dla op. nilpotentnych. $N \in \mathrm{End}(W)$ - nilpotentny.

$W_i = \ker N^i$ $\{0\} = W_0 \subset W_1 \subset W_2 \subset \ldots \subset W_q = W$.

$\rightarrow$ $\underline{\ker N \cap \mathrm{Im}\, N^{q-1}} \subset \underline{\ker N \cap \mathrm{Im}\, N^{q-2}} \subset \ldots \subset \underline{\ker N}$, (*)

$\dim \ker N \cap \mathrm{Im}\, N^{j-1} = \dim W_j - \dim W_{j-1}$.

Niech $\{f_1, \ldots, f_m\}$ będzie bazą $\ker N$ zgodną z zawieraniami (*).

$\{e_{11}, \ldots, e_{m1}\}$ $\forall_i$ $e_{i,1}$ jest końcówką serii dł. $h(i)$

W ten sposób otrzymujemy układ wektorów.

$e_{1h(1)}$ - - - - -

$e_{2h(2)}$

$e_{ih(i)}$

$N \downarrow$ e_{12} e_{22}

e_{11} e_{21} e_{i1} $\ldots$ $e_{m,1}$

Dlaczego $\{e_{i,j} : i \in \{1, \ldots, m\}\ j \in \{1, \ldots, h(i)\}\}$ jest bazą W?

Liniowa niezależność $\sum \alpha_{ij} e_{ij} = 0$ (**) $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$

Działając N^{q-1} nie zerują się $e_{i,j}$ które należą do serii krótszej niż q. Zatem $\alpha_{iq} = 0$ $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$. Dalej działając N^{q-2} $\rightsquigarrow$ $\alpha_{i,q-1} = 0$ i t.d.

Czy wektorów e_{ij} jest tyle co wymiar W.

$$\dim W = \underbrace{\dim W_q - \dim W_{q-1}} + \underbrace{\dim W_{q-1} - \dim W_{q-2}} + \ldots + \underbrace{\dim W_1 - \dim W_0}$$

$$= \underbrace{\dim \ker N \cap \mathrm{Im}\, N^{q-1}}_{\text{końcówki serii dł. } q} + \underbrace{\dim \ker N \cap \mathrm{Im}\, N^{q-2}}_{\text{końcówki serii dł. } q-1} + \ldots + \underbrace{\ldots}_{\ldots}$$

$= $ liczba wektorów $\{e_{ij} : i \in \{1, \ldots, m\}\ j \in \{1, \ldots, h(i)\}\}$

Zauważmy, że macierz N w bazie $\mathcal{E} = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1h(1)}, e_{21}, e_{22}, \ldots, e_{2h(2)}\}$

$$[N] = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \\ \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ \vdots & 0 & 1 \\ & & 0 & \ddots \end{bmatrix} & \\ & 0 & \ddots \end{bmatrix}$$

Iloczyny skalarne.

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ W - p-ń wekt. nad $\mathbb{F}$.

Definicja Odwzorowanie $\langle \cdot | \cdot \rangle : W \times W \longrightarrow \mathbb{F}$ takie, że

1) $\forall u_1, u_2, v \in W \quad \langle v | u_1 + u_2 \rangle = \langle v | u_1 \rangle + \langle v | u_2 \rangle$
2) $\forall u, v \in W \quad \lambda \in \mathbb{F} \quad \langle v | \lambda \cdot u \rangle = \lambda \langle v | u \rangle$
3) $\forall u, v \in W \quad \langle v | u \rangle = \overline{\langle u | v \rangle}$
4) $\forall u \in W \setminus \{0\} \quad \langle u | u \rangle > 0.$

nazywamy iloczynem skalarnym na p-ni W.

Uwaga: (a) $\langle 0 | 0 \rangle = 0 \quad : \quad \langle 0 | 0 \cdot 0 \rangle = 0 \langle 0 | 0 \rangle$

(b) $\langle u_1 + u_2 | v \rangle = \langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle$:

$$\overline{\langle v | u_1 + u_2 \rangle} = \overline{\langle v | u_1 \rangle} + \overline{\langle v | u_2 \rangle} = \langle u_1 | v \rangle + \langle u_2 | v \rangle$$

(c) $\langle \lambda u | v \rangle = \bar{\lambda} \langle u | v \rangle$:

$$\overline{\langle v | \lambda u \rangle} = \bar{\lambda} \, \overline{\langle v | u \rangle} = \bar{\lambda} \langle u | v \rangle$$

$1\frac{1}{2}$ - liniowe
$\frac{1}{2}1$ - liniowe

Przykłady:

$W = \mathbb{C}^n \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \quad v \in \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ Def: $(u|v) = \sum_{i=1}^{n} \bar{u}_i v_i$

$\langle u | v \rangle \quad |u\rangle \, , \quad \langle v| \, , \quad |u\rangle\langle v|$ - notacja Diraca

Przykład #2: $u, v \in \mathbb{C}_n[\cdot] \quad \langle u | v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \overline{u(t)} \, v(t) \, dt$

Definicja. Mówimy, że wektory $u, v \in W$ są ortogonalne (względem $\langle \, | \, \rangle$) jeśli $\langle u | v \rangle = 0$.

Ortogonalizacja Grama-Schmidta.

Niech $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ będzie bazą W. Mówimy, że $\mathcal{E}$ jest bazą ortogonalną jeśli $\langle e_i | e_j \rangle = 0 \quad i \neq j$.
Jeśli dodatkowo $\langle e_i | e_i \rangle = 1$ to mówimy, że $\mathcal{E}$ jest bazą ortonormalną.

Niech $\{f_1, \dots, f_n\}$ będzie dowolną bazą.

Zdefiniujmy (indukcyjnie) wektory $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$e_1 = f_1 \, , \quad e_i = f_i - \underbrace{\sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_k | f_i \rangle}{\langle e_k | e_k \rangle} \cdot e_k}$$