V - p-ń nad $\mathbb{C}$ z iloczynem skalarnym - tak było
$A: V \to V$ t. że $A^*A = AA^*$

Zachodzi tw. spektralne dla A
Istnieje baza on. V złożona z wektorów wł. A
Drugie sformułowanie
$\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = Sp(A)$, $V_i = \ker(A - \lambda_i \mathbb{1})$, P_i - rzuty ortogonalne na V_i. Wtedy $\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{k} P_i$ & $A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i$

Twierdzenie spektralne dla operatorów samosprzężonych na przestrzeni Euklidesowej (tzn. V nad $\mathbb{R}$, $A: V \to V$ $A^* = A$)

Lemat: W - p-ń zespolona z il. skalarnym $\langle \cdot | \cdot \rangle$.
Niech $B: W \to W$, $B^* = B$. Wówczas $sp\, B \subset \mathbb{R}$.

<u>Dowód</u>: $\lambda \in \mathbb{C}$, $w \in W \setminus \{0\}$, $Bw = \lambda w \overset{?}{\Rightarrow} \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccccc} \langle w | Bw \rangle & = \langle w | \lambda w \rangle = & \lambda \langle w | w \rangle & & \\ \| & & \| & \Longrightarrow & \boxed{\lambda = \bar{\lambda}} \\ \langle Bw | w \rangle & = \langle \lambda w | w \rangle = & \bar{\lambda} \langle w | w \rangle & & \end{array}$$

Wniosek: $w_B(z)$ - wiel. char. B.
Pierwiastki w_B są rzeczywiste.

Twierdzenie: V, $A: V \to V$ jak wyżej.
V nad $\mathbb{R}$, $A^* = A$.
Istnieje baza ortonormalna V wektorów wł. op. A.

<u>Dowód</u> Indukcja ze względu na $\dim V$.
1 Krok indukcyjny - oczywisty
$n \Rightarrow n+1$. Przypuśćmy, że A posiada wektor własny e_0 wartości własnej $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Niech $X = \mathbb{R} \cdot e_0$. Wówczas $AX < X$ - oczywiste. Mniej oczywiste $AX^\perp < X^\perp$:
$y \in X^\perp$ to $\langle Ay | e_0 \rangle = \langle y | Ae_0 \rangle = \lambda_0 \langle y | e_0 \rangle = 0 \Rightarrow y \in X^\perp$
$D = A|_{X^\perp}$ Wówczas $D^* = D$. Zatem, skoro $\dim X^\perp = n$ to na mocy zał. indukcyjnego $X^\perp$ posiada o.n. bazę $\{e_1, \dots, e_n\}$ w. własnych operatora D. Wówczas $\{e_0, \dots, e_n\}$ jest on bazą wektorów własnych op. A.

Istnienie $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ i $e_0 \in V$ takiego jak wyżej:
Niech $\mathcal{F} = \{f_0, \dots, f_n\}$ będzie dowolną bazą on V.
Rozważmy macierz $\mathcal{A} = [A]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}} \in M_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{C})$
Macierz $\mathcal{A}$ jest rzeczywista i symetryczna. Operator $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ t. że $Tx = \mathcal{A}x$ $\forall x \in \mathbb{C}^n$ Operator T na $\mathbb{C}^n$, (gdzie il. skalarny na $\mathbb{C}^n$ jest kanoniczny) jest samosprzężony

Wielomian charakterystyczny T ma tylko rzeczywiste pierwiastki. Zauważmy, że $w_T(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = w_A(\lambda)$ a zatem w_A ma rzeczywiste pierwiastki A stąd wynika istnienie λ_0, e_0 j. w. $\blacksquare$

Klasyfikacja form kwadratowych na p-ni euklidesowej.

(p-ń euklidesowa = p-ń rzeczywista z iloczynem skalarnym.)

V; $\dim V < \infty$, $Q : V \to \mathbb{R}$ – forma kwadratowa.

$\langle \cdot | \cdot \rangle$ – il. skalarny w p-ni V.

Z Q związana jest symetryczna forma 2 liniowa

$$b : V \times V \to \mathbb{R} \quad \text{gdzie} \quad Q(v) = b(v, v)$$

$$b(v_2, v_1) = b(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\left(Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2) \right).$$

Funkcjonały liniowe na V są postaci: ustalamy $\tilde{v} \in V$ i definiujemy $\langle \tilde{v} | \in V^*$ gdzie $\langle \tilde{v} | (v) := \langle \tilde{v} | v \rangle$.

Ustalmy $w \in V$ i rozważmy funkcjonał $b(w, \cdot)$. Istnieje $\tilde{w} \in W$ t. że $b(w, v) = \langle \tilde{w} | v \rangle$ $\forall v \in V$.

Powyższe definiuje operator $F : V \to V$ gdzie $Fw = \tilde{w}$.

Czyli $b(w, v) = \langle Fw | v \rangle$ $\forall w \in V, v \in V$

Lemat F jest samosprzężony.

Dowód. $\langle Fw | v \rangle = b(w, v) = b(v, w) = \langle Fv | w \rangle = \langle w | Fv \rangle$

Zatem $F = F^*$. $\blacksquare$

Niech $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ będzie bazą o.n. p-ni V.

Zauważmy, że $[F]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \langle e_j | F e_i \rangle_{i,j=1,\ldots,n} = b(e_i, e_j)_{i,j=1,\ldots,n}$

W szczególności jeśli $\mathcal{E}$ jest o.n. bazą w. wł. F to w tej bazie $[b]_{\mathcal{E}}$ jest diagonalna. Niech $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$ będą wsp. ortogonalnymi związanymi z bazą $\mathcal{E}$. Wtedy $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \phi_i^2 = Q$ gdzie $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ są niezerowymi w. własnymi F.

Niech $\operatorname{sgn} Q = (p, q)$. Wtedy istnieją $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_p$ & $a_{p+1} \geq \ldots \geq a_{p+q}$ t. że $Q = \sum_{i=1}^{p} \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\phi_{p+i}^2}{a_{p+i}^2}$ (**).

Mówimy, że (**) jest postacią kanoniczną formy kw. Q.

<u>**Def**</u> $Q_1, Q_2 : V \to \mathbb{R}$ mają tę samą postać kanoniczną jeśli istnieją wsp. ortonormalne $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$, $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ t. że $Q_1 = \sum_{i=1}^{p} \frac{\phi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\phi_{p+i}^2}{a_{i+p}^2}$ & $Q_2 = \sum_{i=1}^{p} \frac{\psi_i^2}{a_i^2} - \sum_{i=1}^{q} \frac{\psi_{p+i}^2}{a_{p+i}^2}$.

Definicja/Terminologia: V nad $\mathbb{R}$, $T : V \to V$ – operator t. że $T^* = T^{-1}$. Wówczas mówimy, że T jest operatorem ortogonalnym.

Uwaga: T jest ortogonalny jeśli mamy:

$\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ – baza o.n. $\Rightarrow \{Te_1, \dots, Te_n\}$ – baza o.n.

$$\langle Te_i | Te_j \rangle = \langle e_i | \underbrace{T^* T}_{\mathbb{1}} e_j \rangle = \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Stwierdzenie:

Q_1, Q_2 mają tę samą postać kanoniczną $\Leftrightarrow$ istnieje operator ortogonalny $T: V \to V$ t. że $Q_2(v) = Q_1(Tv)$

<u>Dowód</u> Jeśli Q_1, Q_2 mają tę samą postać kanoniczną to $T: V \to V$ definiujemy następująco: niech $\{e_1, \dots, e_n\}$ baza o.n. związana z $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ i $\{f_1, \dots, f_n\}$ z $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$.

Niech $T f_i = e_i$ – daje $Q_2(v) = Q_1(Tv)$.

Na odwrót jeśli $Q_2(v) = Q_1(Tv)$ i w bazie $\{e_1, \dots, e_n\}$ Q_1 ma postać kanoniczną to definiując f_i: $e_i = T f_i$ dostajemy bazę $\{f_1, \dots, f_n\}$ ortonormalną i postać kanoniczną Q_2 w bazie $\{f_1, \dots, f_n\}$ jest taka jak Q_1 w $\{e_1, \dots, e_n\}$ $\blacksquare$