$w = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$

$\forall z \in \mathbb{C} \quad w(z) = 0 \Longrightarrow a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0.$

$0 = w(z+1) - w(z) = b_0 + \ldots + b_{n-1} z^{n-1} \qquad b_{n-1} = n a_n.$

Wniosek: jeśli $v(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n = b_0 + b_1 z + \ldots + b_k z^k$ oraz $a_n \neq 0$ & $b_k \neq 0$ to $n = k$ oraz $a_i = b_i$ $i \in \{1, \ldots, n\}$

Definicja Niech $v = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$. Wówczas $n \in \mathbb{N}$ nazywamy stopniem wielomianu v oraz oznaczamy $\deg v$.

Jeśli $v = 0$ to piszemy $\deg(v) = -\infty$.

Notacje: $\mathbb{C}[\cdot]$ ozn. zbiór wszystkich wielomianów

$\mathbb{C}_n[\cdot]$ ozn. zbiór wielomianów stopnie nie większego niż n.

Dodawanie i mnożenie wielomianów definiuje działania w $\mathbb{C}[\cdot]$.

Fakt 1 Niech $v, w \in \mathbb{C}[\cdot]$. Wówczas $\deg(v+w) \overset{(*)}{\leq} \max\{\deg v, \deg w\}$

Ponadto $\deg v \cdot w = \deg v + \deg w$.

Uwaga: Nierówność (*) może ściśła nierówność: $v = 1 + z$, $w = -z$

$v + w = 1$ i $\deg(v+w) = 0 < \max\{\deg v, \deg w\} = 1.$

Stwierdzenie

Niech $v, w \in \mathbb{C}[\cdot]$ i $w \neq 0$ (Oznaczmy $k = \deg v$, $l = \deg w$)

Wówczas istnieją wielomiany $f, r \in \mathbb{C}[\cdot]$ t. że

(**) $\deg r < \deg w$ i $v = f \cdot w + r$. Ponadto f i r są jednoznacznie wyznaczone przez (**).

Terminologia: f jest wynikiem dzielenia v przez w a r jest resztą z dzielenia v przez w.

Dowód Jeśli $k < l$ to kładziemy $f = 0$ oraz $r = v$ (***)

Dla $k \geq l$ dowód jest indukcją ze względu na k.

Dla $k = 0, \ldots, l-1$ zachodzi (***).

Krok indukcyjny (dla $k \geq l$)

$v = a_0 + \ldots + a_k z^k$, $w = b_0 + \ldots + b_l z^l$ $\quad k \geq l$.

Zauważmy, że $v - \frac{a_k z^{k-l}}{b_l} w \in \mathbb{C}_{k-1}[\cdot]$

Istnieją (na mocy zał. indukcyjnego) f oraz r: $\deg r < l$

i $v - \frac{a_k}{b_l} z^{k-l} w = f \cdot w + r \Rightarrow v = \left(f + \frac{a_k}{b_l} z^{k-l}\right) \cdot w + r,$

Stwierdzenie
Niech $v, w \in \mathbb{C}[\cdot]$ i $w \neq 0$ (Oznaczmy $k = \deg v$, $l = \deg w$)
Wówczas istnieją wielomiany $f, r \in \mathbb{C}[\cdot]$ t. że
(**) $\deg r < \deg w$ i $v = f \cdot w + r$. Ponadto f i r
są jednoznacznie wyznaczone przez (**).
Terminologia: f jest wynikiem dzielenia v przez w a
r jest resztą z dzielenia v przez w.

Dowód Jeśli $k < l$ to kładziemy $f = 0$ oraz $r = v$ (***)
Dla $k \geq l$ dowód jest indukcją ze względu na k.
Dla $k = 0, \dots, l-1$ zachodzi (***).
Krok indukcyjny (dla $k \geq l$)
$v = a_0 + \dots + a_k z^k$, $w = b_0 + \dots + b_l z^l$ $k \geq l$.
Zauważmy, że $v - \frac{a_k z^{k-l}}{b_l} w \in \mathbb{C}_{k-1}[\cdot]$
Istnieje (na mocy zał. indukcyjnego) f oraz r: $\deg r < l$
i $v - \frac{a_k}{b_l} z^{k-l} w = f \cdot w + r \Rightarrow v = \left(f + \frac{a_k}{b_l} z^{k-l}\right) \cdot w + r$,

Przypuśćmy, że $v = \underbrace{w\tilde{f} + \tilde{r} = wf + r}$ & $\deg \tilde{r} < l$.

Zatem $w(f - \tilde{f}) = \tilde{r} - r$. Dalej
$\deg(\tilde{r} - r) < l$ & $\deg\left(w \cdot (f - \hat{f})\right) = \deg(f - \hat{f}) + l$.
Stąd $f = \tilde{f}$ oraz $r = \tilde{r}$

w przeciwnym wypadku $\deg w(f - \tilde{f}) > l$ i dostajemy sprzeczność gdyż $\deg(\tilde{r} - r) < l$.

$\boxtimes$

Definicja mówimy w jest dzielnikiem v i piszemy $w | v$
jeśli $\exists f \in \mathbb{C}[\cdot]$ t. że $v = f \cdot w$.
Największym Wspólnym Dzielnikiem wielomianów $u_1, u_2 \in \mathbb{C}[\cdot]$
nazywamy taki dzielnik v wielomianów u_1 & u_2, że
jeśli $\hat{v}$ dzieli u_1 & u_2 to $\hat{v}$ dzieli v.
Notacja $NWD(u_1, u_2)$.
Jeśli v, v' spełniają powyższe warunki to $\exists c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ t. że
$v = c \cdot v'$.

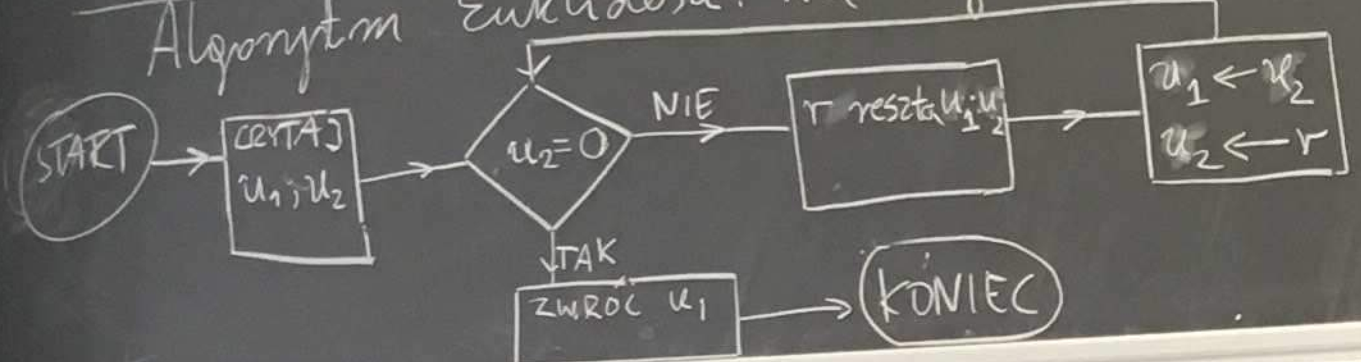
(1) $v \mid v'$ bo v' jest $NWD(u_1, u_2)$ a $v \mid u_1$ & $v \mid u_2$

czyli $v' = f \cdot v$.

(2) symetrycznie $v = g\, v'$ gdzie $f, g \in \mathbb{C}[z]$.

w szczególności $\deg v' = \deg v$ i $\exists c \in \mathbb{C}$: $f = c$ (wtedy $g = \frac{1}{c}$)

Algorytm Euklidesa. Na wejściu mamy u_1 i u_2.



Ostatnia niezerowa reszta w algorytmie Euklidesa jest $NWD(u_1, u_2)$?

a) $u_1 = f_1 u_2 + r_1$

b) $u_2 = f_2 r_1 + r_2$

$r_1 = f_3 r_2 + r_3$

$\vdots$

n) $r_{n-2} = f_n r_{n-1} + r_n$

o) $r_{n-1} = f_{n+1} r_n$.

Dlaczego $r_n = NWD(u_1, u_2)$?

① jeśli $v \mid u_1$ i $v \mid u_2$ to $v \mid r_1$. patrz a)

zatem $v \mid r_2$ patrz b).

i t. d. $v \mid r_k$ $\forall k$.

② r_n dzieli r_{n-1}. patrz o)

zatem r_n dzieli r_{n-2} patrz n).

i t. d. $r_n \mid u_2$ patrz b) i $r_n \mid u_1$ patrz a).

Stwierdzenie

$\exists$ wielomiany f, g t. że $NWD(u_1, u_2) = f u_1 + g u_2$

Dowód:

$$r_{n-3} = f_{n-1} r_{n-2} + r_{n-1}.$$

$$NWD(u_1, u_2) = r_n \overset{n)}{=} -f_n r_{n-1} + r_{n-2} \overset{m)}{=} r_{n-2} - f_n (r_{n-3} - f_{n-1} r_{n-2})$$

$$= (f_n f_{n-1} + 1) r_{n-2} - f_n r_{n-3} \overset{l)}{=} \ldots \overset{a)}{=} f \cdot u_1 + g \cdot u_2.$$

Definicja Jeśli $w \in \mathbb{C}[z]$ oraz $a \in \mathbb{C}$: $w(a) = 0$ to mówimy, że a jest pierwiastkiem wielomianu w.

Fakt a jest pierwiastkiem $w \Leftrightarrow z - a \mid w$.

w szczególności $\exists v \in \mathbb{C}[z], k \in \mathbb{N}$ $w = (z-a)^k \cdot v$, i $v(a) \neq 0$. $k \leftarrow$ krotność pierw.

Zasadnicze twierdzenie algebry.

Niech $w \in \mathbb{C}[z]$ i $n = \deg w$. Wówczas licząc wraz z krotnościami w ma n pierwiastków.