Wielomiany c.d.

$u, v \in \mathbb{C}[\,]$

$NWD(u,v)$ - największy wspólny dzielnik

$\exists f, g \in \mathbb{C}[\cdot]$: $NWD(u,v) = fu + gv$.

Definicja Jeśli $NWD(u,v) = 1$ to mówimy, że u i v są względnie pierwsze.

Przykład

Niech $a_1, \dots, a_k$ będą pierwiastkami ze krotności $n_1, \dots, n_k$:

$u = c(z-a_1)^{n_1} \dots (z-a_k)^{n_k}$ $c \in \mathbb{C}$

Podobnie $b_1, \dots, b_\ell$ - pierwiastki v krotności $m_1, \dots, m_\ell$

$v = d(z-b_1)^{m_1} \dots (z-b_\ell)^{m_\ell}$ $d \in \mathbb{C}$

$NWD(u,v) = (z-e_1)^{j_1} \dots (z-e_i)^{j_i}$ gdzie

$\{e_1, \dots, e_\ell\} = \{a_1, \dots, a_k\} \cap \{b_1, \dots, b_\ell\}$ oraz jeśli $e_1 = a_p = b_q$ to

$\boxed{j_1 = \min(n_p, m_q) \\ \text{i t.d.}}$

Przykład 2

Niech W będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych

$W(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ gdzie $a_i \in \mathbb{R}$.

Zauważmy, że jeśli $W(b) = 0$ to $W(\bar{b}) = 0$.

Rzeczywiście $W(\bar{b}) = a_0 + a_1\bar{b} + \dots + a_n\bar{b}^n = \overline{a_0 + a_1 b + \dots + a_n b^n} = \overline{W(b)} = 0$

zatem $W(z) = (z-b)(z-\bar{b})\,\tilde{W}(z)$. gdy $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$= (z^2 - (2\,\mathrm{Re}\,b)z + |b|^2)\,\tilde{W}(z)$, dla pewnego $\tilde{W} \in \mathbb{C}[\cdot]$.

$\Delta = 4(\mathrm{Re}\,b)^2 - 4|b|^2 = -4(\mathrm{Im}\,b)^2 < 0$

Wniosek. Dla każdego wielomianu rzeczywistego istnieją:

$t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ $b_1, c_1, \dots, b_\ell, c_\ell \in \mathbb{R}$ i $m_1, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$

t. że $W(t) = a_n(t-t_1)^{n_1} \dots (t-t_k)^{n_k} (t^2 + b_1 t + c_1)^{m_1} \dots (t^2 + b_\ell t + c_\ell)^{m_\ell}$.

Ponadto wielomiany wchodzące do powyższego rozkładu są parami względnie pierwsze.

Funkcję wymierną f to funkcje zmiennej rzeczywistej postaci $f(t) = \frac{u(t)}{w(t)}$ gdzie:

1) u, w są wielomianami rzeczywistymi

2) $\deg u < \deg w$.

3) u i v są względnie pierwsze.

Def. Ułamkiem prostym nazywamy funkcję wymierną postaci

i) $\frac{a}{(t-t_0)^n}$ gdzie $t_0, a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) $\frac{bt+c}{(t^2+dt+e)^m}$ gdzie $b, c, d, e \in \mathbb{R}$, $d^2-4e<e$, $m \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie: Każda funkcja wymierna jest sumą ułamków prostych.

$$f(t) = \frac{u(t)}{(t-t_1)^{n_1} \cdot \underbrace{\ldots (t-t_k)^{n_k} (t^2+b_1t+c_1)^{m_1} \ldots (t^2+b_lt+c_l)^{m_l}}} \overset{\text{ozn}}{=} \tilde{w}(t)$$

$$= \frac{u(t)}{(t-t_1)^{n_1} \cdot \tilde{w}(t)}$$

$$= \frac{r(t)\cancel{(t-t_1)^{n_1}}}{\cancel{(t-t_1)^{n_1}}\tilde{w}(t)} + \frac{\hat{g}(t)\tilde{w}(t)}{(t-t_1)^{n_1}\tilde{w}}$$

$$= \frac{r(t)}{\tilde{w}(t)} + \frac{\hat{g}(t)}{(t-t_1)^{n_1}}$$

$NWD((t-t_1)^{n_1}, \tilde{w}) = 1$ zatem $\exists f, g \in \mathbb{R}[\cdot]$ t. że:

$1 = f(t)(t-t_1)^{n_1} + g(t)\tilde{w}(t)$. W szczególności

$$u(t) = \underbrace{u(t)\,f(t)}_{\hat{f}} \cdot (t-t_1)^{n_1} + \underbrace{u(t)\,g(t)}_{\hat{g}} \cdot \tilde{w}(t)$$

$$= \hat{f}(t)(t-t_1)^{n_1} + \hat{g}(t) \cdot \tilde{w}(t),$$

$\hat{f}(t) = p(t) \cdot \tilde{w}(t) + r(t)$, $\deg r < \deg \tilde{w}$.

$$= r(t)(t-t_1)^{n_1} + \underbrace{(\hat{g}(t) + p(t))}_{\hat{g}(t)}\tilde{w}(t)$$

gdzie $\deg \hat{g} < n_1$.

$$\frac{\hat{g}(t)}{(t-t_1)^{n_1}} = \frac{h_0 + h_1(t-t_1) + \ldots + h_k(t-t_1)^k}{(t-t_1)^{n_1}} \qquad k < n_1. \quad h_i \in \mathbb{R}.$$

$$= \frac{h_0}{(t-t_1)^{n_1}} + \frac{h_1}{(t-t_1)^{n_1-1}} + \ldots + \frac{h_k}{(t-t_1)^{n_1-k}}$$ – suma ułamków prostych.

Kontynuując

$\frac{r(t)}{\tilde{w}(t)}$ wygeneruje składniki postaci $\frac{1}{(t-t_2)}, \ldots, \frac{1}{(t-t_2)^{n_2}}$

Jak postępujemy z czynnikami postaci $(t^2+bt+c)^n$?

$$\frac{\tilde{u}(t)}{(t^2+bt+c)^n \cdot \tilde{\tilde{w}}} =$$

$1 = \tilde{f}(t)(t^2+bt+c)^n + \tilde{g}(t) \cdot \tilde{\tilde{w}}(t)$

takie same kroki

$\tilde{u}(t) = \hat{r}(t)(t^2+bt+c)^n + \hat{\hat{g}}(t)\,\tilde{\tilde{w}}(t)$.

gdzie $\deg \hat{r} < \deg \tilde{\tilde{w}}$, $\deg \hat{\hat{g}} < 2n$.

$$= \frac{\hat{r}(t) \cdot (t^2+bt+c)^n + \hat{\hat{g}}(t) \cdot \tilde{\tilde{w}}(t)}{(t^2+bt+c)\,\tilde{\tilde{w}}} = \boxed{\frac{\hat{r}(t)}{\tilde{\tilde{w}}(t)}} + \frac{\hat{\hat{g}}(t)}{(t^2+bt+c)^n}$$

Skoro $\hat{\hat{g}}(t) = (t^2+bt+c) \cdot \check{g}(t) + q_1t + q_2$ to

$$\frac{\hat{\hat{g}}(t)}{(t^2+bt+c)^n} = \frac{\check{g}(t)}{(t^2+bt+c)^{n-1}} + \frac{q_1t+q_2}{(t^2+bt+c)^n}$$

Podsumowując czynnik $(t^2+bt+c)^n$ (w mianowniku) prowadzi
następujących ułamków prostych

$$\frac{q_1 t + p_1}{(t^2+bt+c)^n}, \quad \frac{q_2 t + p_2}{(t^2+bt+c)^{n-1}}, \ldots, \quad \frac{q_n t + p_n}{(t^2+bt+c)}.$$

$\boxtimes$

$g(t)$ $\quad h_0 + h_1(t-t_1) + \ldots + h_k(t-t_1)^k$ $\quad k < n \quad h_i \in \mathbb{R}$