V – przestrzeń wektorowa nad ciałem $\mathbb{F}$ $(= \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C})$

$\mathbb{F}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} : x^i \in \mathbb{F} \right\}$, $\quad \underbrace{\mathbb{F}_n[\,]}_{\text{wiel. st} \leq n \text{ o wsp. w } \mathbb{F}} \subset \underbrace{\mathbb{F}[\,]}_{\text{wszystkie wielomiany}}$

Podprzestrzeń rozwiązań układu równań liniowych.

Niech $a_{ij} \in \mathbb{F}$ gdzie $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Współczynniki $(a_{ij})_{i,j}$ wyznaczają układ równań liniowych na elementach w $\mathbb{F}^n$:

$$(*) \begin{cases} a_{11}x^1 + \dots + a_{1n}x^n = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x^1 + \dots + a_{mn}x^n = 0. \end{cases}$$

Rozwiązania układu $(*)$ tworzą podprzestrzeń wektorową w $\mathbb{F}$.

Przykład $\quad \mathbb{F} = \mathbb{R}$, $m = 1$, $n = 2$. $\quad a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$

$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad x^1 + 2x^2 = 0 \quad$ Rozwiązania $\mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \subset \mathbb{R}^2$.

Twierdzenie. Jeśli $m < n$ to układ $(*)$ ma niezerowe rozwiązania.

Dowód: Indukcja ze względu na m.

Dla $m=1$ (jedno równanie): Jeśli $a_{1j} = 0$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$ to dowolny niezerowy wektor jest rozwiązaniem $(*)$.

Jeśli, np. $a_{11} \neq 0$ to $x^1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x^2 + \dots + a_{1n}x^n)$. I biorąc dowolne niezerowe $x^2, \dots, x^n$ oraz $x^1 = -\frac{1}{a_{11}}(\dots)$ dostajemy niezerowe rozwiązanie.

Krok indukcyjny

$$(*) \begin{cases} a_{11}x^1 + \dots = 0 \\ a_{21}x^1 + \dots = 0 \\ a_{m1}x^1 + \dots + a_{mn}x^n = 0. \end{cases}$$

Załóżmy, że np. $a_{11} \neq 0$. Wówczas $x^1 = -\frac{1}{a_{11}}(a_{12}x^2 + \dots + a_{1n}x^n)$ $(**)$

Wstawiamy $(**)$ do $(*)$ i dostajemy układ równań postaci

$$(***) \begin{cases} \left(a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x^2 + \left(a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)x^3 + \dots + \left(a_{2n} - a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)x^n = 0 \\ \quad \vdots \\ \left(a_{m2} - a_{m1}\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)x^2 + \dots + \left(a_{mn} - a_{m1}\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)x^n = 0 \end{cases}$$

Układ $(***)$ ma $m-1$ równań, zatem z zał. indukcyjnego posiada niezerowe rozwiązanie. Wyliczając x^1 z $(**)$ dostajemy rozwiązanie $(*)$ różne od wektora zerowego.

Definicja. Niech $v_1, \dots, v_n \in V$ oraz $\lambda^1, \dots, \lambda^n \in \mathbb{F}$.

Wektor postaci $\lambda^1 v_1 + \dots + \lambda^n v_n$ nazywamy kombinacją liniową wektorów $v_1, \dots, v_n$.

Niech $S \subset V$ będzie zbiorem niepustym. Wówczas zbiór wszystkich kombinacji liniowych elementów S oznaczamy $\langle S \rangle$ i nazywamy podprzestrzenią generowaną przez zbiór S. W szczególności $S \subset \langle S \rangle$.

Uwaga: Jeśli W jest podprzestrzenią V oraz $S \subset W$ to $\langle S \rangle \subset W$. Czyli $\langle S \rangle$ jest najmniejszą podprz. w V zawierającą S.

Twierdzenie.
Niech V będzie przestrzenią wektorową oraz $\{v_1, \dots, v_l\}$ będzie jest bazą. Jeśli $n > l$ to układ $\{w_1, \dots, w_n\}$, gdzie $w_i \in V$, jest liniowo zależny.

Dowód. Czy istnieją skalary $\mu^1, \dots, \mu^n \in \mathbb{F}$ t. że $\mu^1 w_1 + \dots + \mu^n w_n = 0$ i nie wszystkie μ_i są równe zero? Istnieją a_{ij} t. że
$w_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} v_j$ dla $i = 1, \dots, n$ $(n > l)$.

W takim razie mamy
$$\sum_{j=1}^{l} \Big(\sum_{i=1}^{n} \mu_i a_{ij} \Big) v_j = \sum_{\substack{j=1,\dots,l \\ i=1,\dots,n}} \mu_i a_{ij} v_j = 0.$$
Z liniowej niezależności $\{v_1, \dots$ dostaję układ równań
$$\begin{cases} a_{11}\mu_1 + \dots + a_{n1}\mu_n = 0 \\ \vdots \\ a_{1l}\mu_1 + \dots + a_{nl}\mu_n \end{cases}$$
i skoro $l < n$ to ma on niezerowe rozwiązanie: $\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$. $\boxed{S}$

Wnioski i) V, $\{v_1, \dots, v_l\}$ j.w. oraz $\{u_1, \dots, u_k\}$ jest liniowo niezależny to $k \leq l$.

ii) Jeśli dodatkowo $\{u_1, \dots, u_k\}$ jest bazą V to $k = l$.
Rzeczywiście $k \leq l$ – było. Zamieniając rolami te bazy dostaję $l \leq k$.

Definicja Jeśli V skończenie wymiarowa, i $V \neq \{0\}$, to liczbę elementów jej (dowolnej) bazy nazywamy wymiarem V i ozn. $\dim V$.
Jeśli $V = \{0\}$ to $\dim V = 0$.

Stwierdzenie Jeśli $V \neq \{0\}$ i V skończenie wymiarowa to V posiada bazę.

Dowód. Niech $\{w_1, \dots, w_n\}$ będzie skończonym układem generującym V. Jeśli $\{w_1, \dots, w_n\}$ jest liniowo niezależny to jest bazą. Jeśli jest liniowo zależny to jeden z wektorów np. w_1 jest kombinacją liniową pozostałych, a wtedy $\{w_2, \dots, w_n\}$ generuje V. Kontynuując ten proces po mniej $n-1$ krokach dostaniemy