$W_1 \subset V$ $\quad (V = \mathbb{R}_5[\cdot],\ W_1 = \mathbb{R}_3[\cdot])$

Czy istnieje $W_2 \subset \mathbb{R}_5[\cdot]$ t. że $V = W_1 \oplus W_2$?

$W_1 = \langle \underline{1, x, x^2, x^3} \rangle$

$V = \langle 1, x, x^2, x^3, x^4, x^5 \rangle$

Przykładowe $W_2 = \langle x^4, x^5 \rangle$

Inne uzupełnienie $\widetilde{W}_2 = \langle \underline{x+x^5, x^3+x^4} \rangle$ jest uzupełnieniem

gdyż $(1, x, x^2, x^3, x+x^5, x^3+x^4)$ jest bazą p-ni V.

Twierdzenie. Jeśli V jest p-nią skończenie wymiarową oraz W_1 jest podprzestrzenią V to istnieje podprzestrzeń $W_2 \subset V$ t. że $V = W_1 \oplus W_2$. Uzupełniający.

Dowód. Niech $(u_1, \dots, u_k)$ będzie bazą W_1. Uzupełniamy ten układ do bazy $V \rightsquigarrow (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_{k+l})$. Kładziemy

$W_2 = \langle u_{k+1}, \dots, u_{k+l} \rangle$. ∎

Odwzorowania liniowe

Definicja. Niech V_1, V_2 będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{F}$. Mówimy, że odwzorowanie $A: V_1 \longrightarrow V_2$ jest liniowe jeśli $A(\lambda v + \tilde{\lambda}\tilde{v}) = \lambda A(v) + \tilde{\lambda} A(\tilde{v})$ dla wszystkich $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{F}$ i $v, \tilde{v} \in V_1$.

Odwzorowania liniowe z $\mathbb{F}^m$ do $\mathbb{F}^n$.

Niech $[a^i{}_j]_{\substack{i \in \{1, \dots, n\} \\ j \in \{1, \dots, m\}}}$ (i — # wiersz, j — # kol) będzie macierzą skalarów: $a^i_j \in \mathbb{F}$.

$$= \begin{bmatrix} a^1_1, & a^1_2, & \dots, & a^1_m \\ a^2_1, & a^2_2, & \dots, & a^2_m \\ a^n_1, & a^n_2, & \dots, & a^n_m \end{bmatrix}$$

Odwzorowanie liniowe $A: \mathbb{F}^m \longrightarrow \mathbb{F}^n$ zadane macierzą $[a^i{}_j]$: $A\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^1 \\ \vdots \\ \mu^n \end{bmatrix}$ gdzie

$$\mu^i = \sum_{j=1}^{m} a^i{}_j \lambda^j.$$

Odwzorowanie $A: \mathbb{F}^m \longrightarrow \mathbb{F}^n$ jest liniowe.

Terminologia/notacja. $A\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^m \end{bmatrix} = [a^i{}_j]\begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^m \end{bmatrix}$

Prawą stronę nazywamy iloczynem macierzy $[a^i{}_j]$ i wektora $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda^1 \\ \vdots \\ \lambda^m \end{bmatrix}$. Zauważmy, że k-ta kol. $[a^i{}_j]$, czyli

$\begin{bmatrix} a^1{}_k \\ \vdots \\ a^n{}_k \end{bmatrix}$ jest równa $A\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow$ # wiersza $= k$.

Z następnego stwierdzenia wnioskujemy, że wszystkie odw. liniowe z $\mathbb{F}^m$ do $\mathbb{F}^n$ są zadane przez „odpowiednie" macierze

Stwierdzenie. Niech V będzie sk. wym. przestrzenią nad $\mathbb{F}$, $\mathcal{E}=\{e_1,\dots,e_n\}$ jest bazą V oraz W jest p. wią nad $\mathbb{F}$. Jeśli $w_1,\dots,w_n \in W$ to istnieje dokładnie jedno odwzorowanie liniowe A z V do W t. że $A(e_k)=w_k$.

Dowód. Jednoznaczność: Niech $v=\lambda^1 e_1+\dots+\lambda^n e_n$. Wówczas

$$A(v)=A(\lambda^1 v_1+\dots+\lambda^n v_n)=\lambda^1 A(e_1)+\dots+\lambda^n A(e_n)=$$
$$=\lambda^1 w_1+\dots+\lambda^n w_n.$$

Definiujemy $A: V \to W$ wzorem $A(v)=\lambda^1 w_1+\dots+\lambda^n w_n$ dostajemy istnienie A.

Wniosek: Każde odwzorowanie liniowe $A: \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$ jest zadane jednoznacznie wyznaczoną macierzą $[a^i_j]_{\substack{i\in\{1,\dots,n\}\\ j\in\{1,\dots,m\}}}$ gdzie k-ta kolumna $[a^i_j]$ jest równa $A(e_k)$ oraz $\{e_1,\dots,e_m\}$ jest kanoniczną bazą $\mathbb{F}^m$.

Notacja: Dalej zamiast $A(v)$ piszemy Av, gdzie $A: V\to W$ jest liniowym odwzorowaniem

1

$M_{n,m}(\mathbb{F})$ – macierze o n wierszach i m kolumnach.

W zbiorze $M_{n,m}(\mathbb{F})$ wprowadzamy $+$ i $\cdot$ przez skalary

$$[a^i_j]+[\tilde{a}^i_j]=[a^i_j+\tilde{a}^i_j]$$
$$\lambda\cdot[a^i_j]=[\lambda a^i_j].$$

Notacja V, W – nad $\mathbb{F}$, $L(V,W)$ – zbiór odwzorowań liniowych. Dodawanie w $L(V,W)$ wprowadzamy wzorem

$$(A+\tilde{A})(v):=A(v)+\tilde{A}(v),\ \text{gdzie } A,\tilde{A}\in L(V,W).$$

Mnożenie przez skalary w $L(V,W)$

$$(\lambda\cdot A)(v)=\lambda\cdot A(v)$$

$(L(V,W),+,\cdot)$ jest p-nią wekt. nad ciałem $\mathbb{F}$.

Zauważmy, że $M_{n,m}(\mathbb{F})\cong L(\mathbb{F}^m,\mathbb{F}^n)$.

Skoro $\dim M_{n,m}(\mathbb{F})=n\cdot m=\dim\mathbb{F}^m\cdot\dim\mathbb{F}^n$, to "zgadujemy" że ogólnie $\dim L(V,W)=\dim V\cdot\dim W$. O tym później

Składanie odw. liniowych.

Twierdzenie: $B\in L(V,W)$ oraz $A\in L(W,U)$. Wówczas złożenie $A\circ B: V\to U$ jest odwzorowaniem liniowym.

Dowód.

$(A\cdot B)(\lambda v+\tilde\lambda\tilde v) = A(B(\lambda v+\tilde\lambda\tilde v))$
$= A(\lambda Bv+\tilde\lambda B\tilde v) = \lambda A(Bv)+\tilde\lambda A(B\tilde v) =$
$= \lambda (A\cdot B)(v)+\tilde\lambda (A\cdot B)(\tilde v)$ $\boxtimes$

Wniosek. Jeśli $B\in M_{n,m}(\mathbb{F})$ oraz $A\in M_{l,n}(\mathbb{F})$ wtedy $C=A\cdot B\in M_{l,m}(\mathbb{F})$, gdzie $C=[c^i_j]$ jest dana wzorem $c^i_j=\sum_{s=1}^{n} a^i_s b^s_j$.

$$C\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \vdots\\ \lambda^m\end{bmatrix} = A\,B\begin{bmatrix}\lambda^1\\ \vdots\\ \lambda^m\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{m} b^1_k\lambda^k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{m} b^n_k\lambda^k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{s=1}^{n} a^1_s\left(\sum_{k=1}^{m} b^s_k\lambda^k\right)\\ \vdots\\ \sum_{s=1}^{n} a^l_s\sum_{k=1}^{m} b^s_k\lambda^k\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n} a^1_s b^s_k\right)\lambda^k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{s=1}^{n} a^l_s b^s_k\right)\lambda^k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{k=1}^{n} c^1_k\lambda^k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n} c^l_k\lambda^k\end{bmatrix}$$

$A=\begin{bmatrix}2&4&6\\5&8&2\end{bmatrix}\in M_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{bmatrix}1&4&1&1\\2&5&0&1\\3&6&-1&1\end{bmatrix}\in M_{3,4}$

$C=A\cdot B\in M_{2,4}$

$$\begin{bmatrix}2&4&6\\5&8&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&1&1\\2&5&0&1\\3&6&-1&1\end{bmatrix} = \begin{array}{c c}& \begin{array}{cccc}&&3&\end{array}\\ \begin{array}{c}\\ 2\rightarrow\end{array} & \begin{bmatrix}\cdot&64&\cdot&\cdot\\27&\cdot&3&\cdot\end{bmatrix}\end{array}$$

$5\cdot 1+8\cdot 0+2(-1)$

Twierdzenie

Niech $A\in L(V,W)$. Rozważmy $\operatorname{im}A=\{Av : v\in V\}$ „obraz A” oraz $\ker A=\{v\in V : Av=0\}$ „jądro A”. Wówczas $\operatorname{im}A$ jest podprzestrzenią W, $\ker A$ jest podprzestrzenią V i A różnowartościowe jeśli $\ker A=\{0\}$.

Dowód. Jeśli $w=Av$, $\tilde w=A\tilde v$ to $\lambda w+\lambda\tilde w=A(\lambda v+\lambda\tilde v)\in\operatorname{im}A$. stąd $\operatorname{im}A$ jest podprz.

$Av=0=A\tilde v$ to $A(\lambda v+\tilde\lambda\tilde v)=\lambda Av+\tilde\lambda A\tilde v=0$ stąd $\ker A$ jest podprz.

$Av_1=Av_2 \Leftrightarrow A(v_1-v_2)=0 \Leftrightarrow v_1-v_2\in\ker A$. stąd ostatnia teza tw.