Zadania do wykładu algebra z geometrią

zestaw I - liczby zespolone i wielomiany

November 4, 2011

Zadanie 1. Niech $\alpha = \sqrt[3]{2}$. Wykazać, że zbiór liczb zespolonych postaci $p + q\alpha + r\alpha^2$, $p, q, r \in \mathbb{Q}$ jest ciałem.

Zadanie 2. Wyznaczyć liczby $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$(2 + \mathrm{i})x + (1 + 2\mathrm{i})y = 1 - 4\mathrm{i}$$

Zadanie 3. Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone sprzężone do swojego kwadratu (czyli spełniające równanie $\bar{z} = z^2$).

Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone sprzężone do swojego sześcianu (czyli spełniające równanie $\bar{z} = z^3$).

Zadanie 4. Wykaż równości:

a) $\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx = \dfrac{\sin(nx/2)\cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(2k-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin(x)}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2(k\phi) = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\phi \sin n\phi}{2\sin\phi}$

d) $\cos 8^\circ + \cos 16^\circ + \ldots + \cos 176^\circ = -\dfrac{1}{2}$

Zadanie 5. Podaj wzory dla sum (Wskazówka do a) i b): skorzystaj z wyniku zad. 4a):

a) $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)\cos(kx)$

b) $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)\sin(kx)$

c) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} cos(k\varphi + \alpha)$

Zadanie 6. Zapisać w postaci algebraicznej elementy następujących zbiorów:

a) $\sqrt[3]{1}$

b) $\sqrt[6]{-27}$

c) $\sqrt[3]{2-2i}$

d) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$

Zadanie 7. Rozwiązać metodą Cardano:

a) $z^3 + 3(1-i)z - 2 + i = 0$

b) $z^3 - 3z^2 + 6z = \frac{31}{8}$

c) $z^3 - 3z^2 + 1 = 0$

d) $z^3 - 3\sqrt[3]{2}z + 2 = 0$

Zadanie 8. Wyznaczyć sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków zespolonych wielomianu:

a) $3x^5 - x^3 + x + 2$

b) $x^n + ax^{n-1} + b,\ n \geq 3$

Zadanie 9. Wyznaczyć największy wspólny dzielnik wielomianów f(x) i g(x) oraz wyrazić go w postaci kombinacji wielomianów f(x) i g(x):

a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 4x - 2, g(x) = x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 2$

b) $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2, g(x) = x^2 - x + 1$