Zadania z Algebry I

Seria 1. **27.10.18**

1. Rozwiązać równania kwadratowe w ciele C:
$(3+i)z^2+(3-2i)z+(3-i)=0$; $z^2+(2+i)z+2-2i=0$; $z^2-5z+7+i=0$; $(1+i)z^2+(2+3i)z+4-i=0$;

2. Sprawdzić, że $z=1$ jest rozwiązaniem równania $z^3-9z+8=0$ i wykorzystać to do znalezienia pozostałych rozwiązań tego równania.

3. Sprowadzić do postaci trygonometrycznej wyrażenia:
$1+\cos a+i\sin a$; $1-a^2+2ia$, gdzie $a=\operatorname{tg} a$.

4. Niech $w=e^{i3\pi/5}$. Sprawdzić, że $z=w+\frac{1}{w}$ spełnia równanie $z^2+z=1$. Jakie równanie spełnia w?

5. Niech j, j^2 oznaczają różne od 1 pierwiastki równania $z^3=1$ i niech w ma znaczenie z poprzedniego zadania. Wykazać, że:
$(1+j^2)^4=j$; $(1-j+j^2)(1+w-w^2)=4$; $(1-j)(1-j^2)(1-j^4)(1-j^5)=9$.

6. Niech $w=e^{i2\pi/n}$ i niech k będzie liczbą naturalną niepodzielną przez n. Wykazać, że:
$1+w^k+w^{2k}+\ldots+w^{(n-1)k}=0$;
$1-w^k+w^{2k}-\ldots+(-1)^{n-1}w^{(n-1)k}=\begin{cases}0 & n=2p\\ \frac{2}{1+w^k} & n=2p+1\end{cases}$

7. Dowieść, że:

$$(a)\ \frac{1+it}{1-it}=e^{2i\operatorname{arc\,tg} t}\ \text{dla } t\in\mathbb{R};\ (b)\ \frac{z-1}{z+1}=i\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\ \text{dla } z=e^{i\varphi},\ \varphi\in]-\pi,\pi[;$$
$$(c)\ \frac{z-i}{z+i}=i\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\ \text{dla } z=e^{i\varphi},\varphi\in]-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}[;$$
$$(d)\ \text{Jeżeli } \operatorname{tg}\varphi=i\frac{1-z}{1+z},\ \text{to } \operatorname{tg} n\varphi=i\frac{1-z^n}{1+z^n},\ \text{dla } z\in\mathbb{C},z\neq-1\neq z^n,\ \varphi\in\mathbb{R}$$
$$(e)\ \left(\frac{1+i\operatorname{tg}x}{1-i\operatorname{tg}x}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}nx}{1-i\operatorname{tg}nx}$$

8. Znaleźć liczby zespolone z spełniające równanie $z^6+z^3\overline{z}+\overline{z}^2=0$

9. Podać interpretację geometryczną i naszkicować zbiór: $\{z\in C\ :\ Re(\frac{z-i}{z-5})=0\}$.

10. Wyznaczyć i naszkicować:
(a) obraz półpłaszczyzny $\{z\in C\ :\ Im(z)>1\}$ w odwzorowaniu $f(z):=\frac{2z-1}{2z+3}$;
(b) przeciwobraz $\{z\in C\ :\ 0<arg(z)<\pi/4\}$ w odwzorowaniu $f(z):=\frac{z+i}{z-i}$;
(c) obraz półpłaszczyzny $\{z\in C\ :\ Re(z)>0\}$ w odwzorowaniu $f(z):=\frac{z-3}{z+4}$

11. Sprawdzić, że $\prod_{k=-n}^{n}(u^k-zu^{-k})=\prod_{k=-n}^{n}(u^{2k}-z)=1-z^{2n+1}$ dla $n\in\mathbb{N}$, $u:=e^{\frac{\pi i}{2n+1}}$ oraz $z\in\mathbb{C}$. Zastosować tożsamość do wyprowadzenia wzoru: $\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$ dla $n\in\mathbb{N}$.

12. Dowieść, że jeśli $u=e^{\frac{2\pi i}{n}}$, to $\prod_{k=1}^{n-1}(1-u^k)=n$. Korzystając z tego wyprowadzić (dla $m,n\in\mathbb{N}$) następujące wzory: $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{n}{2^{n-1}}$; $\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$; $\prod_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{\sqrt{2m+1}}{2^m}$.

13. Dowieść, że:

$$\prod_{p=1}^{n}(z-\lambda\epsilon^p)=z^n-\lambda^n,$$

gdzie ϵ jest n-tym pierwiastkiem z jedności, $\epsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

14. Rozwiązać równania:
$(1+i)z^2+(2+3i)z+4-i=0$, $z^4+6z^2+25=0$, $z^2-12\overline{z}+61=0$,
$z^2-15|z|+54=0$, $z^4+2i\overline{z}^2=0$, $z^3+6z+2=0$, $z^3+3z^2-3z-1=0$, $z^3-9z-9=0$.

15. Wykazać, że:
$\sin\frac{\pi}{22} - \sin\frac{3\pi}{22} + \sin\frac{5\pi}{22} - \sin\frac{7\pi}{22} + \sin\frac{9\pi}{22} = \frac{1}{2}$ (wsk: suma pierwiastków 11-tego stopnia z 1 jest równa 0);
$\sum_{k=-n}^{n} \cos k\varphi = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\varphi}{\sin(\varphi/2)}$ (dla $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$);
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(2k+1)\varphi = 2^n \cos^n \varphi \cos(n+1)\varphi$.

16. Dla liczby naturalnej n i $\varphi \in R$ obliczyć $\sum_{k=1}^{n} 2^k \cos(k\varphi)$.

17. Dla ustalonej liczby naturalnej n, znaleźć wszystkie zespolone rozwiązania równania: $1+x+x^2+\cdots+x^n = 0$.

18. Wykazać, że jeśli $z + \frac{1}{z} = 2\cos\varphi$, to $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\varphi$.

19. Obliczyć $\cos\frac{\pi}{5}$.