Zadania domowe z Algebry I
Seria 3.

1. Sprawdzić, że zbiór G wraz z danym działaniem tworzy grupę, wskazać jej element neutralny oraz znaleźć jawny wzór na odwrotność elementu grupy:

   (a) $G := \mathbb{Z}$ z działaniem $m \odot n := m + (-1)^m n$,

   (b) $G :=$ wszystkie funkcje postaci $f(x) := ax + b, a > 0, b \in \mathbb{R}$, ze składaniem odwzorowań,

   (c) $G := [0, a[, a \in \mathbb{R}^+$ z działaniem $x \underset{a}{+} y := \begin{cases} x + y & \text{gdy } x + y < a; \\ x + y - a & \text{gdy } x + y \geq a. \end{cases}$

2. Napisać tabelkę działania dla grupy symetrii D_3 trójkąta równobocznego. Wypisać wszystkie podgrupy tej grupy. Czy jest to grupa przemienna?

3. Niech $a * b = \frac{a+b}{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$. Sprawdzić, czy działanie jest łączne i czy ma el. neutralny.

4. Niech $a \square b = 5^{(\log_5 a)(\log_5 b)}$, $a, b \in \mathbb{R}$. Sprawdzić, czy działanie jest przemienne i łączne i czy ma el. neutralny.

5. Działanie na zbiorze $\mathbb{R}$ jest określone wzorem $a \circ b = ka + lb + m$, gdzie k, l, m są ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Jakie warunki muszą spełniać k, l, m by działanie $\circ$ było: a) przemienne, b) łączne, c) miało element neutralny?

6. Sprawdzić, czy dana para jest grupą: $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(]0, 1], \cdot)$, $(\{1, -1, i, -i\})$, $(\{a + b\sqrt{5}, \quad a, b \in \mathbb{R}\}, \cdot)$.

7. Niech dla $i = 1, 2, 3, 4$ funkcje $f_i : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R} \setminus 0$ będą określone wzorami: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = -\frac{1}{x}$. Sprawdzić, że składanie funkcji jest działaniem w zbiorze $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Czy para $(G, \circ)$ jest grupą?

8. Niech macierze $\mathbf{1}, \mathbf{i}, j, k$ bedą określone następująco: $\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, $j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $k = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, Zbudować tabelkę w zbiorze: $Q_8 = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm j, \pm k\}$ i sprawdzić, czy para $(Q_8, \cdot)$ jest grupą.

9. Niech

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 8 & 7 & 6 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}, g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 2 & 6 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

$$h := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Przedstawić permutacje $f, f^{-1}, gf, hf, hg, fhf^{-1}, f^{-1}gh, h^{-1}g^{-1}f^{-1}$ jako iloczyny rozłacznych cykli.

10. Znaleźć permutacje $\rho, \sigma \in S_{10}$ takie, że $\sigma \circ \sigma = id$, $\rho \circ \rho = id$, oraz

$$\sigma \circ \rho := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Wykazać, że $\sigma : \sqrt[20]{1} \to \sqrt[20]{1}$, dane wzorem $\sigma(z) := iz^3$, jest permutacją. Obliczyć jej znak.

12. Funkcja $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ określona jest wzorem: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{2}x + 6$. Czy $f \in S_3$? Jaki jest jej znak?

13. Sprawdzić, że wzór $\sigma(x) := 3x - 25\,\mathrm{E}\left(\frac{x-1}{8}\right)$ określa permutację zbioru $X = \overline{0,25}$. Znaleźć rozkłady σ oraz σ^4 na cykle rozłączne; obliczyć znak i rząd permutacji σ. ($\mathrm{E}(x)$ oznacza część całkowitą x).

14. Sprawdzić, że cykl długości n jest permutacją parzystą wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą nieparzystą.

15. Znaleźć znak permutacji σ, rozkład σ na rozłączne cykle oraz obliczyć $\sigma^{24} := \sigma \circ \ldots \circ \sigma$ jeżeli:
$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 8 & 9 & 1 & 3 & 10 & 4 & 2 & 7 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

16. Ile jest permutacji $\sigma : \overline{1,10} \to \overline{1,10}$ spełniających warunek:
$\forall k \in \overline{1,10} : \quad |\sigma(k) - k| \le 1$?

17. Niech $n \ge 2$. Dowieść, że dla każdego podzbioru $K \subset \overline{1, n-1}$ istnieje dokładnie jedna permutacja $\sigma_K \in S_n$, spełniająca dwa warunki:
$\forall k \in K : \quad \sigma_K(k) = k + 1, \quad \forall j \in \overline{1,n} \setminus K : \quad \sigma_K(j) \le j.$

18. Kwadrat podzielony został na $n \times n$ kwadratowych pól. Jaki znak ma permutacja σ zbioru tych pól odpowiadająca a) obrotowi kwadratu o kąt 90^o; b) odbiciu kwadratu względem jego osi symetrii równoległej do pary boków; c) odbiciu kwadratu względem jednej z jego dwóch przekątnych?

19. Czy cykle: $\gamma = (1\,2\,6\,5)$ i $\delta = (2\,3\,5\,4)$ generują grupę S_6?

20. Obliczyć liczbę inwersji oraz znak permutacji jeśli:
$$(a) \quad \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 2m-2 & 2m-1 & 2m \\ m+1 & 1 & m+2 & 2 & m+3 & \ldots & m-1 & 2m & \end{pmatrix}$$
$$(b) \quad \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m & m+1 & m+2 & \ldots & 2m & 2m+1 & 2m+2 & \ldots & 3m \\ 3 & 6 & \ldots & 3m & 1 & 4 & \ldots & 3m-2 & 2 & 5 & \ldots & 3m-1 \end{pmatrix}$$

21. Znajdź największy wspólny dzielnik wielomianów
   (a) $2 + 4x + 5x^2 + 4x^3 + 2x^4 + x^5 \quad$ i $\quad x^6 + x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 2x + 2$
   (b) $x^3 - x - \sqrt{2} \quad$ i $\quad x^4 + 1$

22. Rozłóż na ułamki proste następujące ułamki właściwe
$$\frac{1}{x^3 + x^5}, \quad \frac{1}{x^4 + 1}, \quad \frac{1}{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$